Prima gara - Suole di Gauss

1) [20 punti] Newton Pulsifer cerca di determinare una combinazione di quattro cifre per aprire la serratura di uno scrigno. Avendo torturato la strega, la proprietaria dello scrigno, Newton ha scoperto che la combinazione è un quadrato perfetto con penultima cifra 5. Qual è il più grande numero di quattro cifre che può essere la combinazione cercata da Newton?

2) [25 punti] In una scacchiera di 100 x 100 quadretti, Carlo colora un quadretto di rosso, poi un quadretto di blu, poi un quadretto rosso, poi tre quadretti blu, poi dopo aver colorato un quadretto rosso riempie cinque quadretti di blu. Ecosì via, colorando ogni volta due quadretti blu in più della volta precedente ed un quadretto rosso. Quando carlo ha colorato l'intera scacchiera, quanti quadretti rossi ci saranno?

3) [35 punti] Un quadrilatero convesso ha le diagonali che misurano 8 m e 12 m. L'angolo minore tra esse misura 30°. Quanto vale l'area del quadrilatero in m^2?

4) [35 punti] Qual è la probabilità che i compleanni di Adam, Pepper, Wensleydale e Brian cadano in 4 giorni diversi della settimana? Si dia come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ottenuta dopo aver semplificato tutti i fattori comuni. (Si assuma che la probabilità di compiere gli anni in un dato giorno della settimana sia $\frac{1}{7}$ indipendentemente dal giorno scelto).

5) [40 punti] Tre studenti poco studiosi vorrebbero superare un esame all'università, così decidono di presentarsi ad ogni appello impreparati sperando di non essere bocciati. Sapendo che, per ciascuno dei tre studenti, la probabilità di essere bocciati ad ogni appello è pari a $\frac{1}{2}$, qual è la probabilità che, dopo tre appelli, almeno uno degli studenti NON sia passato? Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

6) [45 punti] Il potere del Direttore del Dipartimento di Matematica è simboleggiato da un antico bastone istoriato che ha la forma di un cilindro alto 235 centimetri e con una circonferenza di base di 4 centimetri. Il bastone presenta un'incisione che sale ad elica lungo di esso; il segmento che congiunge l'inizio e la fine di tale scanalatura è parallelo all'asse del bastone ed è diviso dall'incisione in 141 parti uguali. Determinare quanti centimetri è lunga la scanalatura.

7) [45 punti] In quanti modi si può scrivere 9000 come somma di almeno due interi consecutivi? (Ad esempio per 9 si hanno 2 possibilità: $9 = 2 + 3 + 4$, $9 = 4 + 5$).

8) [45 punti] 2018 membri di un'affiatata squadra di matematica stanno per prendere parte alla prima gara di matematica sul sito `https://suoledigauss.it/`, ma ancora non hanno deciso a chi toccherà l'arduo compito di scegliere il problema jolly, quindi si dispongono velocemente in cerchio e, in senso orario,

si numerano coi numeri da 1 a 2018. Il professore inizia, quindi, a girare lentamente intorno al cerchio, in senso orario, e allontana dal cerchio, uno per uno, gli studenti che, per questa volta, non dovranno scegliere il jolly. Parte dal numero 1 e allontana dal cerchio "uno studente sì e uno no" in modo alternato. L'ultimo che rimarrà nel cerchio, ormai contrattosi in un punto, sarà il malcapitato addetto al jolly: qual è il numero di questo studente? (Se, per esempio, gli studenti fossero 11, allora verrebbero allontanati, in ordine, gli studenti 1, 3, 5, 7, 9, 11, 4, 8, 2, 10 e lo studente numero 6 sarebbe l'addetto al jolly)

9) [50 punti] Trovare il più piccolo numero n tale che $999999 \cdot n = 111...11$. Fornire come risposta la somma delle cifre di n.

10) [60 punti] Calcolare il valore della somma

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}=\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$$

Fornire come risposta le prime quattro cifre dopo la virgola (se il numero è intero dare 0000 come risposta).

11) [60 punti] Si prendano n numeri interi consecutivi e sia S la somma dei loro quadrati. Per quanti valori di n è possibile che S sia un numero primo?

12) [65 punti] Determinare quanto vale il rapporto tra l'area di un pentagono regolare e l'area del pentagono regolare individuato dall'intersezione delle sue diagonali. Dare come risposta il rapporto moltiplicato per 1000.

13) [65 punti] Siano ABC un triangolo equilatero e P un punto interno a tale triangolo. Sapendo che $\overline{\text{PA}}=5$, $\overline{\text{PB}}=12$ e $\overline{\text{PC}}=13$, determinare l'area di ABC.

14) [70 punti] Sia $p(x)$ il polinomio

$$\begin{aligned}p(x)=&\frac{(x-2)(x-3)...(x-2018)}{(1-2)(1-3)...(1-2018)}+\frac{(x-1)(x-3)...(x-2018)}{(2-1)(2-3)...(2-2018)}+\\&...+\frac{(x-1)(x-2)...(x-2017)}{(2018-1)(2018-2)...(2018-2017)}=\sum_{k=1}^{2018}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{2018}\frac{x-j}{k-j}\end{aligned}$$

Una volta scritto il polinomio come $p(x)=a_{2017}x^{2017}+...+a_1x^1+a_0$ si calcoli la somma $S=a_{2017}^3+...+a_1^3+a_0^3$.

15) [70 punti] Sia $p(x)$ il polinomio monico di grado minimo tale che

$$(x+3)(x+2)p(x-1)=(x-3)(x-2)p(x+1)$$

Dire quanto vale la somma dei coefficienti di $p(x)$.