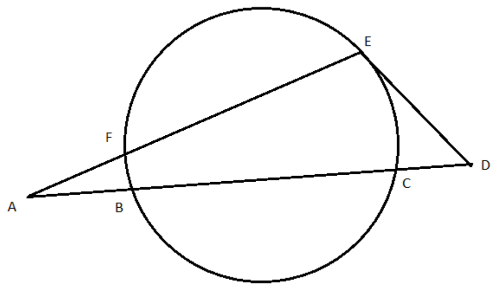
Seconda gara Suole di Gauss

29 gennaio 2018

1. Gli iscritti al corso di Ingegneria aerospaziale di una famosa università sono 81. Di questi, solo una piccola percentuale sono donne. Infatti, scegliendo due studenti a caso, la probabilità che siano entrambi maschi è di $\frac{73}{90}$. Quante donne sono iscritte al corso?

2. Il segmento $\overline{DE}$ è tangente alla circonferenza nel punto E. Se $\overline{AF} = 4$ metri, $\overline{EF} = 6$ metri, $\overline{AB} = 5$ metri e $\overline{DE} = 3\sqrt{2}$ metri, quanto misura AD?



3. Sia x la soluzione reale di $x^3 + 4x = 8$. Quanto vale $x^7 + 64x^2$?

4. La facciata del nuovo dipartimento di Matematica presenta 30 finestre disposte in una tabella 6×5. Una sera Francesco nota che vi sono 8 luci accese e che in ogni riga e in ogni colonna le luci accese sono o 2 o nessuna. Quante sono le configurazioni con 8 luci accese che rispettano questo criterio?

5. Quanto vale la somma delle prime 100 cifre dopo la virgola di $(\sqrt{50}+7)^{100}$?

6. Sia ABC un triangolo con $\overline{AC} = 127$ e sia D un punto sul prolungamento del lato AB dalla parte di B e tale che $\overline{CD} = 310$. Calcolare il rapporto tra il raggio R_1 della circonferenza circoscritta ad ABC e il raggio R_2 di quella circoscritta a BCD e scrivere la somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

7. Siano a_1, a_2, a_3, ... tutti i numeri interi positivi n tali che $\lfloor\sqrt{n}\rfloor | n$. Si sa che esistono due interi N e M tali che:

$$N + \frac{1}{M+1} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} < N + \frac{1}{M}$$

Dare come risposta $N + M$

8. Un trapezio isoscele $ABCD$ ha le basi di CD di 56 m e AB di 84. Siano FG e EH paralleli alle basi con F, E su AD e G, H su BC. Le diagonali AC e BD dividono ognuno dei due segmenti FG e EH in tre parti uguali. Qual è la lunghezza di $FG + EH$ (in metri)?

9. Quanto vale la somma di tutti i possibili valori di k di $x^3 - 33x^2 + 315x - k$ per i quali il polinomio ha due sole radici reali?

10. Quante sono le parole di 18 lettere che contengono solo 9 lettere A e 9 lettere B tali che, preso comunque un segmento iniziale della parola, esso non contenga più B che A?

11. Sia ABC un triangolo un triangolo, e sia O il suo circocentro. Sia M il punto medio di AB e N il punto medio di BC. La distanza $\overline{OM}$ è di 210 km, la distanza $\overline{ON}$ di 176 km e $\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 = (\frac{\overline{AC}}{2})^2$. Quanto vale il raggio del cerchio inscritto in ABC?

12. Qual è il minimo numero di numeri reali che devo prendere se voglio essere sicuro che ce ne siano due, diciamo x, y, tali che

$$0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}?$$

13. Sia N un numero che si può scrivere come somma di k interi positivi consecutivi se e solo se $k = 1$ oppure $k = 2017$.

$$N = a + (a+1) + ... + (a+k-1)$$

Consideriamo ora tutti gli interi positivi con la stessa proprietà e tra tutti guardiamo qual è il valore di a più piccolo possibile. Qual è questo valore?

14. Sia $p(x)$ il polinomio $p(x) = (1 + x + x^2 + ... + x^{2016})^{2017}$. Se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2016\cdot 2017}x^{2016\cdot 2017}$, determinare le ultime 4 cifre della parte intera di $a_0 + a_{2017} + a_{2\cdot 2017} + ... + a_{2016\cdot 2017}$.

15. Biancaneve e i sette nani sono seduti attorno ad un tavolo circolare, ed ognuno impila sul tavolo davanti a sé un certo numero di libri, tra 2 e 9 (estremi inclusi). Si accorgono che, presi comunque due di loro seduti adiacenti, il numero di libri davanti a uno dei due divide il numero di libri davanti all'altro. Dotto ha 9 libri sul tavolo davanti a sé, perciò Biancaneve, che siede al suo fianco sinistro, ha 3 oppure 9 libri davanti. In quanti modi possibili si può ottenere la distribuzione di libri sul tavolo?

16. Per un polinomio P di grado 2000 con coefficienti reali distinti, sia $M(P)$ l'insieme di tutti i polinomi che si possono ottenere da P tramite una permutazione dei suoi coefficienti. Un polinomio P è detto $n-$indipendente

se $P(n) = 0$ e se da ogni polinomio Q in $M(P)$ si può ottenere un polinomio Q_1 tale che $Q_1(n) = 0$, scambiando al massimo una coppia di coefficienti di Q. Trovare tutti gli interi n per i quali esistono polinomi $n-$indipendenti. Dare come risposta il più grande intero $n < 10000$ per il quale esistono polinomi $n-$indipendenti.