Terza gara Suole di Gauss

15 febbraio 2018

1. All'interno di un quadrato di vertici A, B, C, D, il punto P si trova a distanza 2, 1 e $\sqrt{2}$ dai vertici A, B e C rispettivamente. Determinare quanto vale l'area del quadrato.

2. Un triangolo ABC ha l'angolo in A di $60°$ e l'angolo in B di $45°$. La bisettrice dell'angolo in A incontra BC in un punto T tale che $AT = 24$. Quanto vale l'area del triangolo?

3. In un cubo di lato 1 metro, quanto misura in centimetri la distanza tra le due diagonali di due facce adiacenti se queste sono sghembe?

4. Dato un cerchio C ed un punto esterno P, consideriamo una coppia di rette secanti C uscenti da P che formano tra loro un angolo di $5°$. I due archetti individuati dall'intersezione di queste rette con la circonferenza misurano 2 e 4 centimetri. Qual è la lunghezza del raggio di C?

5. Nell'isola dei cavalieri e dei furfanti (i cavalieri dicono sempre il vero, i furfanti sempre il falso) è il giorno del censimento. Un funzionario del Ministero addetto al censimento entra in un caffè dell'isola e chiede a cinque persone la stessa domanda: "Quanti sono i furfanti su quest'isola?". Riceve le seguenti risposte:
   - Il loro numero diviso per 56 dà come resto 19.
   - Il loro numero diviso per 132 dà come resto 23.
   - Il loro numero diviso per 105 dà come resto 13.
   - Il loro numero diviso per 162 dà come resto 17.
   - Il loro numero diviso per 156 dà come resto 37.

   Sapendo che gli abitanti dell'isola sono 10000 e che le informazioni date dai Cavalieri presenti permettono di stabilire la risposta in modo unico, quanti sono i furfanti?

6. Un numero intero è detto "a specchio" se ha almeno due cifre e ha almeno un divisore comune maggiore di 1 con il numero letto al contrario (ad esempio, 11, 21 e 30 sono a specchio). Sia data la sequenza con 5 numeri più piccoli possibile e consecutivi tali che sono tutti a specchio. Quanto vale il più grande di questi?

7. Per quante coppie ordinate (n, p), con n intero positivo minore o uguale a 200 e p numero primo, la somma $p^2 + np$ è quadrato di un numero intero?

8. È dato un reticolo di 64×37 quadrati tutti uguali. Paolo parte da un vertice del reticolo e, dopo aver percorso almeno una volta tutte le stradine

interne e perimetrali, ritorna al vertice di partenza. Determinare quanto è lungo, come minimo, il percorso di Paolo (esprimere la risposta assumendo come unità di misura la lunghezza del lato dei quadrati del reticolo).

9. Una cassaforte è protetta da un codice a cinque cifre che cambia ogni giorno. Il proprietario della cassaforte ha deciso che, per non sforzare troppo il cervello, il codice sia sempre composto usando esattamente due sequenze di due diverse cifre, ad esempio 44333 e 07777, ma non 43334 e neppure 77707. Sia $\frac{p}{q}$ la frazione ottenuta dividendo il numero totale dei codici proposti dal proprietario per il numero di tutti i possibili codici di cinque cifre, con p e q primi tra loro. Quanto vale $q-p$?

10. In un'antica tribù del Sud America, si gioca il gioco della doppia testa-e-croce, con una moneta, tra due squadre di due giocatori. Un giocatore della prima squadra lancia la moneta: se esce croce, è eliminato dal gioco; se esce testa, non succede nulla. Ora, un giocatore dell'altra squadra lancia una moneta: se esce croce, è eliminato; se esce testa, elimina uno dei giocatori della prima squadra. Il gioco passa di nuovo alla prima squadra e si continua come dall'inizio. Perde la squadra che finisce prima i giocatori. Che probabilità ha la prima squadra di vincere? Si dia la risposta scrivendo le prime quattro cifre dopo la virgola del risultato.

11. Bianca e Fabio giocano a dadi. Hanno tre dadi: uno con 4 facce, numerate da 1 a 4; un altro con 6 facce, numerate da 1 a 6; l'ultimo dado con 8 facce, numerate da 1 a 8. Bianca sfida Fabio al seguente azzardo: Fabio tira tutti i dadi una volta; a quel punto Bianca ne getta via uno; Fabio tira i due dadi rimasti una seconda volta. Si sommano tutti i punti ottenuti (con il primo lancio di tre dadi ed il secondo con i due rimasti): se la somma è 15, vince Fabio, altrimenti vince Bianca. Fabio lancia i dadi la prima volta e ottiene un punteggio totale di 8. Bianca valuta perfettamente le sue probabilità di vincere a seconda del dado che getta via. Qual è la sua migliore probabilità di vincere? (Scrivere come soluzione le prime 4 cifre dopo la virgola del risultato).

12. Uno storico della città si è accorto che il deficit del bilancio segue alcune regole curiose. Infatti, se chiamiamo $f(n)$ il deficit dell'anno n dalla fondazione della città, allora $f(1) = 1$ e, per tutti i numeri naturali n, $\mathrm{f}(2n) = 2f(n) + 1$. Quanto è stato il deficit nell'anno 1024-esimo dalla fondazione della città?

13. Sviluppando i calcoli di $\frac{(1+\sqrt{2})^{13}}{3+2\sqrt{2}}$ si ottiene un numero del tipo $a + b\sqrt{2}$, con a e b interi. Quanto vale $a-b$?

14. Di una funzione $F : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, cioè di una funzione che ad ogni numero intero associa un numero intero, si sa che $F(F(x)) = x + 2$ e che $F(25) = 100$. Quanto vale $F(2008)$?

15. Un polinomio della forma $p(x) = x^{2m} - 2|a|^m \cos(\theta)x^m + a^{2m}$, con $a, \theta \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{Z}^+$, si può sempre scrivere in modo unico come

$$p(x) = (x^2 + b_1x + c_1)(x^2 + b_2x + c_2)\dots(x^2 + b_mx + c_m)$$

con $b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$.

Nel caso in cui $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $m = 2018$ e $\theta = \frac{\pi}{5}$, calcolare $c_1 + c_2 + \cdots + c_m$.

16. Trovare tutti i polinomi $W(x)$ a coefficienti interi di grado minore di 1024 tali che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $W(n)|(2^n - 1)$. Detti $W_1(x), W_2(x), \ldots, W_m(x)$ tali polinomi, dare come risposta $(W_1(1))^2 + (W_2(1))^2 + \cdots + (W_m(1))^2$.