Quarta gara Suole di Gauss

8 Marzo 2018

1. In un'aula del Dipartimento di Matematica, un murale illustra il Teorema di Pitagora. Per alimentare il significato simbolico, le lunghezze dei lati del triangolo rettangolo raffigurato sono state scelte in progressione geometrica. Sapendo che il quadrato costruito sul cateto minore ha area $1000cm^2$, determinare (in cm^2) l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa.

2. Un parco comprende un lago di forma quadrata, di cui ogni sponda costituisce la base di un'aiuola a forma di triangolo equilatero. I quattro vertici delle aiuole che non sono sul lago, sono uniti a due a due da recinti rettilinei. Il terreno fra aiuole e recinti è lasciato incolto. L'area del lago è di 9747 metri quadrati, quanti sono i metri quadrati dell'area del terreno incolto?

3. In un triangolo ABC, sia M il punto medio di BC e sia N il punto su BC tale che $B\widehat{A}N = C\widehat{A}M$. Si sa che $5\overline{AB} = 8\overline{AC}$. Quanto vale il rapporto tra $\overline{NB}$ e $\overline{NC}$? (Rispondere con 1000 volte il rapporto richiesto).

4. Una moderna struttura pubblicitaria è costituita da un prisma retto la cui base è un esagono regolare di 1 metro di lato. Il prisma ruota a velocità costante intorno al suo asse, mostrando così alternativamente le 6 facce laterali su cui ci sono dei cartelloni pubblicitari. Michela, rimasta per un certo tempo ferma di fronte alla struttura, ha notato che dal suo punto di osservazione per metà del tempo si vedono contemporaneamente 3 cartelloni (ovviamente sotto angolazioni variabili) e per metà del tempo se ne vedono solo 2. Determinare, in centimetri, la distanza di Michela dall'asse di rotazione.

5. Sia f una funzione $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ razionale di variabile razionale tale che $f(x+y) = f(x)+f(y)$ per ogni x e y numeri razionali. Si sa che $f(\frac{7}{8}) = \frac{8}{7}$. Quanto vale $f(\frac{49}{2})$?

6. Quante soluzioni intere (i, j) ha l'equazione $3i^2 + 2j^2 = 77 \cdot 6^{2012}$?

7. Sapendo che $xy + xz = 17$, $xy + yz = 20$ e $xz + yz = 27$ e che x, y, z sono reali positivi, quanto vale $10x + 10y + 10z$?

8. È data una funzione $f(x)$ tale che $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$. Quanto vale $f(2017)$?

9. Qual è il più grande intero n, tale che esiste almeno un intero m, con $0 \leq m \leq 10000$, tale che $2m+1$ ha esattamente n divisori positivi?

10. Trovare tutte le terne di soluzioni di interi postivi (x, m, n) tali che $2^m + 3^n = x^2$. Dare come risposta il prodotto di tutti gli elementi di tutte le terne.

11. Trovare tutte le coppie di soluzioni intere (x, y) tali che $5x^2 - 6xy + 7y^2 = 130$. Dare come risposta la somma dei valori assoluti di tutti gli elementi di tutte le coppie.

12. Quante sono le coppie di soluzioni intere (a, b) tali che $(a^2 - b)(a + b^2) = (a + b)^2$?

13. Un cacciatore sta cercando un animale raro nella foresta per arricchire la sua sala dei trofei e stasera ha nascosto svariate trappole per attirarlo. In ognuna ha messo un'esca diversa composta da 8 pezzi di carne disposti in fila. Sapendo che ha usato solo 3 tipi di carne e può aver messo solo due pezzi uguali consecutivi, quante esche può aver creato?

14. Un altro cacciatore (per questa gara il WWF potrebbe prendere provvedimenti contro i matematici) spara da una distanza di $100m$ a una volpe che sta scappando da lui. Supponi che la probabilità che colpisca la volpe da questa distanza sia $\frac{1}{2}$. Se sbaglia, il cacciatore ricarica il suo fucile e spara di nuovo, ma nel frattempo la volpe si è allontanata di $50m$. Se sbaglia di nuovo, ricarica il fucile e spara una terza e ultima volta, ma intanto che lo fa la volpe si allontana di altri $50m$. Supponendo che la probabilità di un colpo sia inversamente proporzionale al quadrato della distanza, determinare la probabilità che il cacciatore riesca a colpire la volpe. (Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini)

15. Un vaso contiene 10 palline, 5 rosse e 5 nere. 5 persone vengono bendate e pescano a turno due palline ciascuna, senza rimetterle nel vaso. Qual è la probabilità che ogni persona abbia pescato due palline di colore diverso? (Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini)

16. Alberto, Bianca, Carlo e Daniela sono stati scelti come capitani per sperimentare un nuovo tipo di gare a squadre su SdG. In quanto capitani devono formare ognuno la propria squadra. L'unica regola riguardo le squadre è che ognuna di queste deve essere composta da almeno due persone (capitano compreso). Sapendo che i capitani scelgono i membri della squadra tra i loro 8 compagni di allenamento e che nessuno degli 8 compagni di allenamento può rimanere senza squadra, in quanti modi diversi possono essere fatte le squadre?