

## Quinta gara Suole di Gauss

26 Marzo 2018

1. Durante l'esame orale di Probabilità il professor Dadychev interroga gli studenti in ordine alfabetico, partendo da una lettera scelta secondo un algoritmo segreto: prende 21 dadi ognuno con un numero  $n$  di facce, con  $n$  compreso tra 1 e 21 e tale che non ci siano due dadi con lo stesso numero di facce; tira tutti i dadi e fa la somma dei numero ottenuti. Da questo punto in poi nessuno ha mai capito quali conti faccia per decidere la lettera.

Paolo Volpino non è molto studioso, infatti è la terza volta che ripete l'esame, ma è molto perspicace e le precedenti volte ha capito che il professore inizierà dalla lettera V (la sua) solamente se il numero ottenuto dal professore sarà multiplo di 13. Sapendo questo è abbastanza tranquillo di non essere interrogato per primo.

Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini che rappresenta la probabilità che esca la lettera V.

2. Il professor Vespucci, che insegna Calcolatori Elettronici, racconta ai suoi studenti di essere al lavoro per un computer ternario, ovvero che lavora in codifica ternaria, anziché in binario. Il professore in particolare sta studiando un tipo rivoluzionario di memoria: può essere vista come una scacchiera, in cui ogni casella è un trit (come un bit, ma che può assumere tre valori diversi) e 9 trit formano un tryte; in questa memoria le **parole** (gruppi di 3 tryte) possono essere scritte sia in orizzontale che in verticale. Uno studente osserva che riempiendo un numero minimo di trit, si può fare in modo che non ci sia nessuno spazio per scrivere una **parola** senza interruzioni (né in orizzontale né in verticale). In una memoria di  $3^5$  trit di lato, qual è il numero minimo di trit da riempire, in modo da non poter più scrivere nessuna **parola** senza interruzioni?
3. Elisa ama decorare le pagine del suo diario con 10 stelle rosse o dorate. Ogni giorno le disegna in fondo alla pagina appena scritta. Siccome le piacciono le stelle dorate ha deciso che in ogni pagina ce ne devono essere almeno due, in linea, una vicina all'altra, ma la decorazione deve essere sempre diversa rispetto ai giorni precedenti. Per quanti giorni potrà andare avanti in questo modo?

4. Sia  $n = 2^{31} \cdot 3^{19}$ . Quanti interi positivi divisori di  $n^2$  sono più piccoli di  $n$  ma non dividono  $n$ ?
5. Le venti lettere a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J sono scritte ognuna sotto un foglio di carta; i 10 fogli contenenti una lettera maiuscola vengono mischiati e posizionati in ordine casuale in cerchio; successivamente, i 10 fogli con una lettera minuscola vengono mischiati e posizionati in ordine casuale negli spazi vuoti tra i primi 10 foglietti. Qual è la probabilità che nessuna lettera minuscola sia accanto alla corrispondente lettera maiuscola? Dare come risposta le ultime 4 cifre della somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini
6. Siano  $a, b, c$  tre interi positivi tali che  $a, b, c, a + b - c, a + c - b, b + c - a$  e  $a + b + c$  sono 7 primi positivi distinti. Sia  $d$  la differenza tra il più grande e il più piccolo di questi 7 primi. Sapendo che 800 è un elemento dell'insieme  $\{ a + b, b + c, c + a \}$ , determinare il valore massimo possibile di  $d$ .
7. Trovare tutte le terne  $(m, n, p)$  di interi positivi tali che  $m + n + p = 2002$  and il sistema di equazioni  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = m, \frac{y}{z} + \frac{z}{y} = n, \frac{z}{x} + \frac{x}{z} = p$  abbia almeno una soluzione reale diversa da 0. Dare come risposta il valore assoluto della più grande differenza tra due elementi della stessa terna.
8. Data la funzione  $f(x) = ax^5 + bx^3 + x^2 + cx + |x| + 1$ , dire quanto vale  $f(50)$ , sapendo che  $f(-50) = 50$ .
9. Quanto vale la seguente somma?

$$\frac{1}{2 \cdot \lfloor \sqrt{1} \rfloor + 1} + \frac{1}{2 \cdot \lfloor \sqrt{2} \rfloor + 1} + \dots + \frac{1}{2 \cdot \lfloor \sqrt{9999} \rfloor + 1}$$

10. Per quante coppie ordinate  $(n, p)$ , con  $n$  intero positivo minore o uguale a 200 e  $p$  numero primo, la somma  $p^2 + np$  è quadrato di un numero intero? [Si ricorda che 1 non è un numero primo].
11. Massimo sta portando la sua amica Giovanna su per un fiume con una barchetta. Massimo rema contro corrente ad una velocità costante rispetto alla riva di  $1Km/h$  mentre il fiume scorre con una velocità costante di  $2Km/h$  (sempre rispetto alla riva). Giovanna appoggia il suo cappellino sul bordo della barchetta e continuando a chiacchierare con Massimo non si accorge che il cappellino cade in acqua e si allontana galleggiando. Solo 30 minuti dopo la caduta del cappellino Giovanna si accorge di averlo perso. Massimo allora gira immediatamente la barca e insegue il capellino remando sempre allo stesso ritmo di prima (mantenendo dunque, in modulo, la stessa velocità relativa rispetto all'acqua). Trascurando il tempo che Massimo impiega a fare la virata, determinare quanti minuti intercorrono tra l'istante in cui il cappellino cade in acqua e quello in cui Giovanna riesce a recuperarlo.

12. Mentre sorseggiava un vodka martini, shakerato, non mescolato, James Bond aveva notato la scrittura della formula del rapporto conico del laser

$$r = \sqrt[3]{8 - \sqrt{37}} + \sqrt[3]{8 + \sqrt{37}}$$

lasciata imprudentemente vicino alle olive. In seguito, aveva scoperto che il rapporto di potenza del laser deve essere

$$r^3 - 9r + 2011$$

Ora, per poter sabotare efficacemente il laser, deve calcolare esattamente il valore del rapporto di potenza. Che numero calcola James?

13. Per conoscere in anticipo il vincitore di questa gara, un indovino ha ordinato una sfera di cristallo di 40 centimetri di raggio. La sfera è stata trasportata in una scatola cubica di un metro di lato. Data la fragilità dell'oggetto, la sfera era tenuta ferma, all'interno della scatola, da otto sferette di gomma, uguali tra di loro e poste in corrispondenza dei vertici del cubo in modo da impedire ogni movimento della sfera di cristallo. Determinare, in millimetri, il raggio delle sfere di gomma usate per l'imballaggio.
14. Un grande plotter è stato programmato per eseguire un disegno su un enorme foglio di carta: partendo da un punto prefissato, la puntina si muove di un metro verso destra, poi di 50 cm verso l'alto, poi di 25 cm verso sinistra, quindi di 12.5 cm verso il basso. Poi continua ad andare alternativamente verso destra, in alto, verso sinistra, ed in basso, dimezzando ogni volta la lunghezza del tratto tracciato. Per un difetto del software, il plotter non si ferma più. Determinare, alla lunga, a quanti millimetri di distanza dal punto iniziale verrà a trovarsi la puntina.
15. Una serra protegge nei mesi invernali la coltivazione di banane (a soli fini estetici) nei giardini del Parlamento. La base della serra è un quadrato la cui area misura  $450 \text{ m}^2$ . Da due lati opposti del quadrato partono 2 facce della serra a forma di triangolo equilatero. I restanti 2 lati del quadrato sono le basi (minori) di 2 trapezi isosceli uguali. Le basi maggiori dei 2 trapezi, lunghe il doppio del lato del quadrato, sono unite in alto a completare la struttura. Determinare, in metri cubi, il volume della serra.
16. Un grattacielo è composto da un prisma e una piramide. Il prisma ha come base un pentagono regolare: il perimetro di base è  $600\text{m}$ , le pareti laterali sono alte  $240\text{m}$ . La piramide, che funge da tetto, ha la stessa base del prisma e ogni spiovente è un triangolo equilatero. Sempre grazie a ventose che gli permettono di muoversi in qualunque direzione sulla superficie liscia del palazzo, 007 sta scalando il grattacielo per posizionare una bomba su ognuno degli spigoli, esattamente  $30\text{m}$  sotto la grondaia alla base del tetto. James ha posizionato la terza, ma si rende conto di

aver sbagliato: ha già fissato una bomba in ciascuno dei due spigoli vicini e ora deve raggiungere uno dopo l'altro i due spigoli più lontani. Qual è la misura in metri della distanza minima che deve percorrere per terminare il lavoro e fissare tutte e cinque le bombe nei punti richiesti?