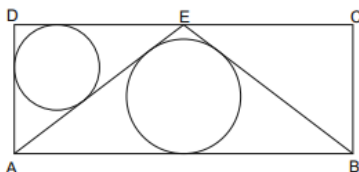


Sesta gara Suole di Gauss

9 Aprile 2018

1. Sia $T = \{9^k \mid k \text{ è un intero, } 0 \leq k \leq 4000\}$. Sapendo che 9^{4000} ha 3817 cifre e che la sua prima cifra (quella più a sinistra) è 9, quanti elementi di T hanno 9 come loro prima cifra?
2. Un postino consegna la posta alle 19 case della sua zona. Il postino nota che non succede mai che due case adiacenti ricevano la posta lo stesso giorno, ma anche che non ci sono mai più di due case in fila che non ricevono posta nello stesso giorno. Quanti diversi schemi di consegna della posta rispettano queste condizioni?
3. Un quadrato 14×14 è diviso in 196 quadratini unitari. Ciascuno dei 225 vertici è colorato di rosso o di blu. Trovare il numero di colorazioni possibili tali che ogni quadratino unitario abbia 2 vertici di ciascun colore.
4. 20 punti sono segnati sulla circonferenza di un cerchio. In quanti modi diversi questi punti possono essere collegati a coppie da 10 corde che non si intersecano all'interno del cerchio?
5. Trovare il più grande intero n tale che n è divisibile per tutti gli interi positivi minori di $\sqrt[3]{n}$.
6. Dire quante sono le terne di numeri naturali (a, b, c) con $b \leq 2016$, che verificano le seguenti equazioni:
$$\begin{cases} \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right) = \frac{143}{6(ab+bc+ac)} \\ \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right) = \frac{165}{6(ab+bc+ac)} \\ \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right) = \frac{220}{6(ab+bc+ac)} \end{cases}$$
7. Sia ABC un triangolo rettangolo con ipotenusa BC , siano D ed E punti del lato AB tali che $\overline{AD} = 3$ cm, $\overline{DE} = 9$ cm, $\overline{EB} = 8$ cm, $\widehat{DCE} = \widehat{ABC}$. Quanto vale l'area del triangolo CDE ?
8. Una ditta ha deciso di realizzare delle stampe a colori su 25 tovaglie di stoffa. Ha a disposizione due stampi di forma circolare di raggi 36 cm 48 cm. Ogni tovaglia avrà la forma di un rettangolo $ABCD$. Indicato con E il punto medio di DC è necessario che la circonferenza più piccola sia inscritta nel triangolo AED e quella più grande sia inscritta nel triangolo

ABE . Quanti decimetri quadrati di stoffa sono necessari per realizzare le 25 tovaglie?



9. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(x) + 2f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}$ per ogni x diverso da 0. Quanto vale $100 \cdot f(100)$?
10. Un arcipelago è formato da 100 isole. Per equità, gli abitanti le hanno chiamate con i numeri da 1 a 100. Ogni isola è una nazione indipendente. Ma tutte le isole dell'arcipelago sono riunite in un'unione che batte la stessa moneta. In più, per ciascun n da 1 a 100, l'isola n ha esattamente n abitanti. Gli abitanti dell'arcipelago si dividono tra quelli di indole C , che dicono sempre il vero, e quelli di indole O , che dicono sempre il falso. Le isole sono collegate da ponti (galleggianti, sospesi o sommersi): l'isola n è collegata con un ponte a ogni altra isola m tale che n sia multiplo di m oppure m sia multiplo di n . Due isole collegate da un ponte sono dette "linkate". Per dimostrare la forte unione delle isole, l'inno dell'arcipelago ha una sola, lunga strofa che ogni cittadino può cantare perché è una frase che pronuncia senza contraddire la propria indole (non importa se C o O): "Nella totalità delle isole linkate alla mia isola, al massimo tanti abitanti quanti il numero che è la mia isola sono di indole C ". Quanti sono gli abitanti dell'arcipelago di indole C ?
11. Determinare quante terne di interi x, y e z soddisfano la seguente equazione:

$$833x + 595y = 4021 - 323z$$

12. Determinare le ultime quattro cifre di $N = 1001^{10} + 9$.
13. Un numero di 10 cifre è detto **interessante** se le sue cifre sono tutte distinte ed è un multiplo di 11111. Quanti interi **interessanti** esistono?
14. In un trapezio $ABCD$ la base minore CD misura 50 cm, mentre la base maggiore AB misura 200 cm. Scelto un punto F su BC , il segmento OF , dove O è il punto di intersezione delle diagonali del trapezio, è parallelo alla base maggiore. Se prolungo OF dalla parte di O fino a incontrare AD in Q , quanti cm misura QF ?
15. Un quadrilatero ha tre lati uguali. Il rapporto tra i due angoli compresi tra due lati uguali adiacenti è di $\frac{41}{19}$. Il massimo comune divisore tra la misura dei due angoli è 4. Quanto misura in gradi l'angolo opposto all'angolo più ampio del quadrilatero?

16. Costruisco i polinomi **monici** $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x), \dots$, rispettando i seguenti vincoli:

- $p_0(x) = 0$;
- il polinomio $p_n(x)$ ha grado n ;
- dato $p_n(x)$, $p_{n+1}(x)$ è tale che il massimo di $|p_{n+1}(x) - p_n(x)|$ con $-1 \leq x \leq 1$ sia il più piccolo possibile.

Detto $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, si calcoli il valore a cui tende la successione

$$p_0\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad p_1\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad p_2\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad p_3\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad \dots$$

Fornire come risposta il risultato moltiplicato per 10000.