Soluzioni prima gara - Suole di Gauss

1. Coppa Fermat (7 Marzo 2008, problema 14)

   Poiché il problema chiede di determinare il più grande quadrato perfetto di quattro cifre con penultima cifra 5, un'idea potrebbe essere quella di calcolare i quadrati perfetti minori di 10000 (100^2), fino a che non se ne trova uno con penultima cifra 5. Così facendo, dopo pochi tentativi, si trova che $84^2 = 7056$ è il numero richiesto. Riportiamo anche la soluzione ufficiale. Dato che $100^2 = 10000$, il numero n^2 cercato deve essere ottenuto da $n = 10a + b$ con $a \neq 0$ e b cifre. Allora $n^2 = 10(10a^2 + 2ab) + b^2$. La cifra delle decine di b^2 deve essere dispari. Allora la cifra delle unità di n^2 è 6 e b è 4 oppure 6. La cifra delle decine di n^2 deve essere 5 e la si calcola come cifra delle unità del numero $2ab + c$ dove c è la cifra delle decine di b^2, dunque $c = 1$ se $b = 4$, e $c = 3$ se $b = 6$. Per cercare il massimo n^2 di quattro cifre, si trova che $a = 8$ produce la condizione cercata per $b = 4$.

2. Gara Matematica di Firenze (6 aprile 2009, problema 1)

   Al termine della colorazione ci saranno 100 quadratini rossi. Nel tentativo di chiarire bene il ragionamento che faremo, chiamiamo k-esimo passo l'intervallo di tempo in cui Carlo colora un quadretto di rosso e $2k-1$ quadretti di blu, con $k > 0$ intero. Per rispondere alla domanda è sufficiente capire quanti passi servono a Carlo per colorare l'intera scacchiera. Dopo n passi Carlo avendo colorato $2k$ quadretti al k-esimo passo, ha colorato un numero di quadretti pari a

   $$2+4+6+\cdots+(2n-2)+2n = 2(1+2+3+\cdots+(n-1)+n = n(n+1).$$

   Dobbiamo a questo punto cercare il più grande intero n tale che $n^2 + n$ è minore di 10^4; saremmo così sicuri che Carlo termina la colorazione al passo sucessivo, dopo aver colorato di rosso $n + 1$ quadretti.

   Detto in altri termini, dobbiamo trovare il più grande intero n che risolve la disuguaglianza

   $$x^2 + x - 10^4 \leq 0.$$

   Tale disuguaglianza ha soluzioni reali nell'intervallo compreso tra le radici, che sono $\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 10^4}}{2}$. Indicando con $\lfloor x \rfloor$ la parte intera inferiore di x, cioè il più grande intero minore o uguale a x, il numero n che cerchiamo è

   $$\lfloor\frac{-1+\sqrt{1}+4\cdot 10^4}{2} = \lfloor\frac{-1+\sqrt{4}\cdot 10^4}{2} = \lfloor\frac{-1+200}{2}\rfloor = 99.$$

   Dunque, Carlo ha colorato $n + 1 = 100$ quadrati rossi.

3. Inventato

   Per determinare l'area del quadrilatero è sufficiente utilizzare la formula $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} \cdot sen\alpha$, dove α è l'angolo compreso tra le diagonali.

Tuttavia, se non si fosse a conoscenza di questa formula, è possibile determinare ugualmente l'area utilizzando la formula per l'area di un triangolo $A = \frac{1}{2}ab \cdot sen\gamma = \frac{1}{2}bc \cdot sen\alpha = \frac{1}{2}ac \cdot sen\beta$. Indichiamo infatti con O il punto di intersezione delle diagonali $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Si ha che l'area del quadrilatero è $A = \frac{1}{2}\overline{AO} \cdot \overline{OB} sen(150°) + \frac{1}{2}\overline{BO} \cdot \overline{OC} sen(30°) + \frac{1}{2}\overline{CO} \cdot \overline{OD} sen(150°) + \frac{1}{2}\overline{OD} \cdot \overline{OA} sen(30°)$. Poichè $sen(30°) = sen(150°)$, $A = \frac{1}{2}sen(30^{circ})(\overline{AO} \cdot \overline{OB} + \overline{BO} \cdot \overline{OC} + \overline{CO} \cdot \overline{OD} + \overline{DO} \cdot \overline{OA} = \frac{1}{2}sen(30°)[\overline{AO}(\overline{OB} + \overline{DO}) + \overline{CO}(\overline{OB} + \overline{DO})] = \frac{1}{2}sen(30°)(\overline{AO} + \overline{CO})(\overline{OB} + \overline{DO}) = \frac{1}{2}sen(30°)\overline{AC} \cdot \overline{BD}$, dimostrando così la formula utilizzata sopra. Dunque $A = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BD} sen(30°) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 12 \cdot 2 = 24$

4. (Coppa Fermat, 7 Marzo 2008, problema 13)

   $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{7^4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{7^3} = \frac{120}{343}$

5. Qualche imprecisata gara a squadre

   Calcoliamo la probabilità dell'evento complementare $\mathbb{P}(A^c)$, dal momento che è più semplice. La probablità che tutti gli studenti siano passati entro il terzo appello è pari alla probabilità che siano tutti passati al primo appello, sommata alla probabilità che due siano passati al primo appello e uno al secondo e così via per tutte le combinazioni possibili, ovvero $\mathbb{P}(A^c) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8})^3 = (\frac{7}{8})^3 = \frac{343}{512}$, quindi $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = \frac{169}{512}$. La risposta è dunque 0681.

6. Gara a squadre Parma (Anno 2003, problema 21)

   Immaginiamo di srotolare il cilindro e di riportarlo su un piano. Il suo sviluppo su un piano è quindi un rettangolo attraversato da 141 rette. La base del rettangolo coincide con la misura della circonferenza di base del cilindro (4 centimetri), mentre l'altezza coincide con l'altezza del cilindro (235 centimetri). Dunque la misura di ognuna delle 141 rette è: $\sqrt{4^2 + (\frac{235}{141})^2} = \sqrt{16 + \frac{235^2}{141^2}} = \frac{611}{141}$. Poichè le rette sono 141, la lunghezza totale della scanalatura è $\frac{611}{141} \cdot 141 = 611$.

7. Gara a squadre Cesenatico (6 maggio 2000, problema 12)

   Sia a il più piccolo degli interi che vengono sommati e k il numero di interi sommati. Allora la somma di tutti questi è data da $a + (a+1) + \cdots + (a+k-1) = k \cdot a + (0 + 1 + \cdots + (k-1))$. Utilizzando la formula per la somma dei primi $k-1$ interi positivi, la somma precedente si riscrive come $k \cdot a + \frac{1}{2} \cdot (k-1)k$. Ci siamo perciò ricondotti all'equazione $k \cdot (a + \frac{k-1}{2}) = 9000$, ovvero $k(2a + k - 1) = 18000$. Da questa forma dell'equazione si ricava perciò $k|18000$; riscrivendo invece l'equazione come $2a + k - 1 = \frac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3}{k}$, dove il membro destro è un intero, si può controllare la parità: se k è dispari, entrambi i membri sono pari, e questo è possibile; se invece k è pari, il membro sinistro è dispari, e quindi deve esserlo anche quello destro, e questo accade solo se k è divisibile per 2^4, in modo da cancellare i fattori due a numeratore. Infine, riscrivendo l'equazione come $0 < 2a = \frac{18000}{k} - k + 1$ e risolvendo la disequazione, si trova la condizione $k \leq 134$. Dato che k deve essere un divisore di 18000, ne segue che i k dispari accettabili sono $3; 5; 9; 15; 5^2; 5^3; 3 \cdot 5^2; 3^2 \cdot 5$ (8 possibilità: notare che 1 è escluso, perchè vogliamo che 9000 sia somma di almeno 2 interi) e quelli pari (che devono essere multipli di 16) sono invece $16 \cdot 1; 16 \cdot 3; 16 \cdot 5$ (3 possibilità). Se ne conclude che 9000 si scrive come somma di interi positivi consecutivi in esattamente 11 modi.

8. Inventato prendendo spunto da "Problem Solving Strategies" di A. Engel

   Risolviamo il problema generale in cui ci sono n studenti. Osserviamo innanzitutto che se n è una potenza di 2, diciamo $n = 2^k$ allora rimane nel cerchio lo studente col numero più alto, infatti al primo giro escono dal cerchio tutti gli studenti di numero dispari, poi tutti quelli di numero divisibile per 2, ma non per 4, poi quelli di numero divisibile per 4, ma non per 8 e così via, finche non escono quell di numero divisibile per 2^{k-1}, ma non per $2^k = n$. Se invece n non è una potenza di 2, allora si può scrivere, in modo unico, come $n = 2^k + a$, con $0 < a < 2^k$. In questo caso, dopo che a studenti sono usciti, rimangono 2^k studenti nel cerchio. A questo punto "rietichettiamo" gli studenti nel modo seguente:

$$\begin{array}{cccc} 2a+1 \mapsto 1 & 2a+2 \mapsto 2 & \dots & n \mapsto n-2a \\ 2 \mapsto n-2a+1 & 4 \mapsto n-2a+2 & \dots & 2a \mapsto n-a. \end{array}$$

   Adesso usiamo quanto abbiamo appena dimostrato col punto precedente per dire che nel cerchio rimane il ragazzo di "etichetta" (il nuovo numero) $n - a$, che originariamente era il numero $2a$. Nel caso in cui $n = 2018$ il numero del ragazzo rimasto nel cerchio è quindi 1988.

9. Es.4 Cap.6 "Problem Solving Strategies" A. Engel

   L'equazione originaria è equivalente a $(10^6 - 1)n = \frac{10^k - 1}{9}$, dove k è il numero di cifre "1", quindi

$$n = \frac{10^k - 1}{9(10^6 - 1)}.$$

   Ma questo è possibile se e solo se $10^k - 1$ è divisibile per $10^6 - 1$, cioè se k è divisibile per 6 (dimostrarlo per esercizio), e per 9. Dal fatto che 6 divide k, $k = 6m$, da cui $n = (1 + 10^6 + 10^{6 \cdot 2} + \cdots + 10^{6(m-1)})/9$, che è intero se e solo se m è un multiplo di 9. Quindi il minimo n si ottiene per $m = 9$, per cui $n = (1 + 10^6 + 10^{12} + \cdots + 10^{48})/9 =$ 111111222222333333444444555555666666777777888889, quindi la somma delle cifre è 217.

10. Qualche imprecisata gara dei Giochi di Archimede

    Cerchiamo di trasformare la somma data in una somma telescopica: prendiamo un generico termine della somma e trasformiamolo

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} &= \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(k+1) - k} \\ &= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}. \end{aligned}$$

Ora possiamo riscrivere la somma data come

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$$
$$=(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}})+(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+(\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}})=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}.$$

11. Internet

Sia a il primo degli n numeri consecutivi. Allora cerchiamo gli n per cui esiste un numero primo p tale che

$$p=a^2+(a+1)^2+\cdots+(a+(n-1))^2=na^2+2(1+2+\cdots+(n-1))+(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2)$$
$$=na^2+(n-1)n+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

Poniamo $d=M.C.D.(n,6)$. Allora

$$p=\frac{n}{d}(da^2+d(n-1)+\frac{(n-1)d(2n-1)}{6}$$

Si deve, perciò, avere $\frac{n}{d}=1$, altrimenti $n>d\geq 1$ e quindi entrambi i fattori sono maggiori di 1, che è assurdo. I casi in cui si può avere $n=d$ sono solo quattro:

- n=1, che non dà soluzioni;
- n=2, per cui esiste la soluzione $5=1^2+2^2$;
- n=3, per cui esiste la soluzione $2=(-1)^2+0^2+1^2$;
- n=6, per cui esiste la soluzione $19=(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2+3^2$.

Quindi i valori di n che vanno bene sono 3.

12. Inventato

Sia $ABCDE$ il pentagono grande e $FGHIL$ il pentagono piccolo, come in figura. Indichiamo con L la misura del lato del pentagono grande, con l la misura del lato del pentagono piccolo e con d la misura della diagonale del pentagono grande. La misura degli angoli interni di un pentagono regolare è $\frac{180°\cdot(5-2)}{5}=108°$. Inoltre, poichè il triangolo ABC è isoscele su base AC, $B\widehat{A}C=B\widehat{C}A=\frac{(180°-108°)}{2}=36°$. Dunque anche $E\widehat{A}D=36°$ (infatti i triangoli ABC e EAD sono congruenti). Da ciò segue che $D\widehat{A}C=108°-36°\cdot 2=36°$. Considero il triangolo ABH: $B\widehat{H}A=72°$ e dunque, poichè anche $A\widehat{B}H=72°$, ABH è isoscele su base BH. Da ciò segue che $AH=L$. Considero ora i triangoli ABH e ABD: questi sono simili poichè entrambi sono isosceli e hanno l'angolo al vertice di 36°. Da questa similitudine segue che: $\frac{AB}{AD}=\frac{BH}{AB}$, ovvero: $\frac{L}{d}=\frac{d-L}{L}$. ovvero: $L^2=d^2-Ld$, cioè $d^2-Ld-L^2=0$, da cui possiamo ricavare d. $d=\frac{L\pm\sqrt{L^2+4L^2}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\cdot L$ (da cui ovviamente scegliamo la soluzione positiva). Ora osservo che $l=\overline{GH}=\overline{AC}-2(\overline{AC}-\overline{AH})=2\overline{AH}-\overline{AC}=2L-d=L\cdot[2-(\frac{1+\sqrt{5}}{2})]$. Dunque il rapporto richiesto è uguale a $(\frac{L}{l})^2=(\frac{1}{[2-(\frac{1+\sqrt{5}}{2})]})^2=(\frac{1}{\frac{4-1-\sqrt{5}}{2}})^2=(\frac{2}{3-\sqrt{5}})^2=(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^2=\frac{14+6\sqrt{5}}{4}=6,854$

13. Inventato

Costruiamo tre copie del triangolo originario applicando, per ottenere ciascuna copia, una rotazione di 60° in senso antiorario attorno a ciascuno dei tre vertici A, B, C (vedi Figura 1). Notiamo che si sono formati tre triangoli equilateri di lati 5, 12, 13 e tre triangoli rettangoli congruenti di lati 5, 12, 13. Notiamo inoltre che l'unione (disgiunta) di questi sei triangoli ha area doppia rispetto al triangolo equilatero originario, infatti il triangolo originario è coperto dall'unione dei triangoli e in ognuna dello copie è coperto uno "spicchio" diverso. L'area del triangolo equilatero originario è quindi

$$\mathcal{A} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}(5^2 + 2^2 + 13^2) + 3 \cdot \frac{5 \cdot 12}{2}}{2} = \frac{169\sqrt{3} + 180}{4}$$

La risposta è dunque 0118.

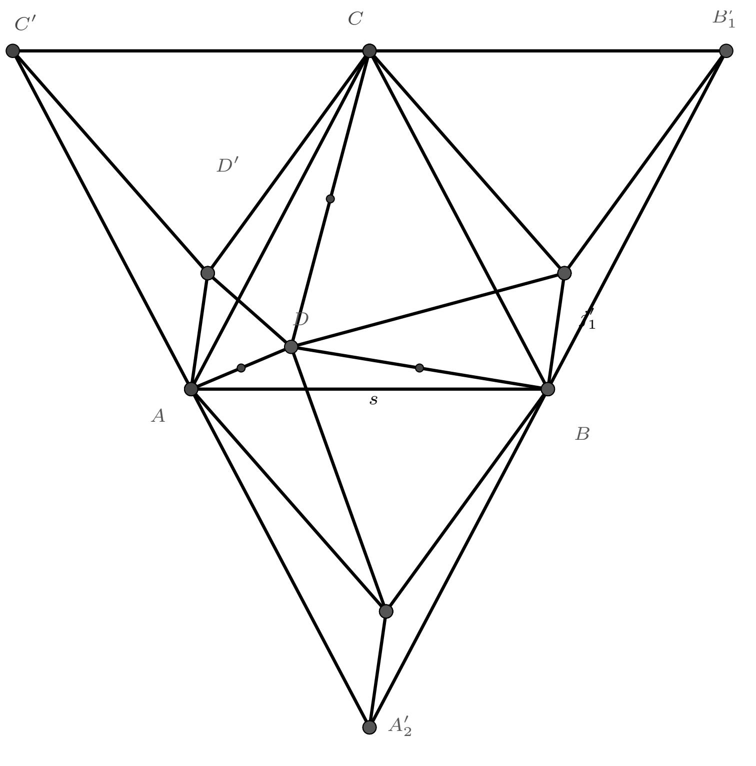

Figura 1:

14. Inventato

Ricordiamo prima di tutto che ogni polinomio NON nullo di grado n ha al più n radici. Allora basta osservare che $p(1) = p(2) = \cdots = p(2018) = 1$ e che $deg(p(x)) \leq 2017$, in quanto, ponendo $q(x) = p(x) - 1$, si ha che $deg(q(x)) \leq 2017$ e che $q(1) = \cdots = q(2018) = 0$; questo implica che q(x) è il polinomio nullo, quindi $p(x) = 1$ e la somma cercata è $S = 1$.

15. Inventato

    La somma dei coefficienti di $p(x)$ è $p(1)$ e sostituendo $x = 2$ nell'equazione data si ottiene $5 \cdot 4 \cdot p(1) = 0$, cioè $p(1) = 0$.