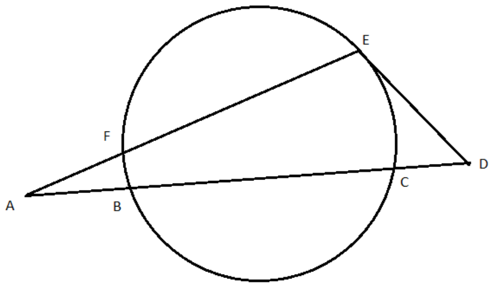
Soluzioni Seconda Gara Suole di Gauss

29 gennaio 2018

1. Gara Online per squadre femminili (21/11/16)

   Detto x il numero di ragazze, la probabilità che i due studenti scelti siano maschi è $\frac{81-x}{81} \cdot \frac{80-x}{80} = \frac{73}{90}$. Risolvendo l'equazione si ottiene come risultato accettabile $x = 8$.

2. Gara di Matematica on-line (9/11/2015, problema 17)

   Per il teorema delle secanti, si ha che $\overline{AF} \cdot \overline{AE} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$, da cui si ricava che $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4 \cdot (4+6) = 4 \cdot 10 = 40$. Poiché $\overline{AB} = 5$, deve essere $\overline{AC} = 8$, ovvero $\overline{BC} = 3$. Per il teorema della tangente e della secante, si ha che $\overline{DE}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{BD}$. Indicata con x la misura di $\overline{CD}$, $(3\sqrt{2})^2 = x \cdot (x+3)$, ovvero $x^2 + 3x - 18 = 0$, che risolta dà come unica soluzione positiva $x = 3$. Dunque $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = 5 + 3 + 3 = 11$. La risposta è quindi 0011.

3. Gara di Matematica on-line (9/11/2015, problema 3)

   $x^3 + 4x = 8$ e dunque $x^3 = -4x + 8$. $x^7 + 64x^2 = x \cdot (-4x+8)^2 + 64x^2 = 16x^3 - 64x^2 + 64x + 64x^2 = 16 \cdot (-4x+8) + 64x = 16 \cdot 8 = 128$. Dunque la risposta è 0128.

4. Gara di Parma del 2003

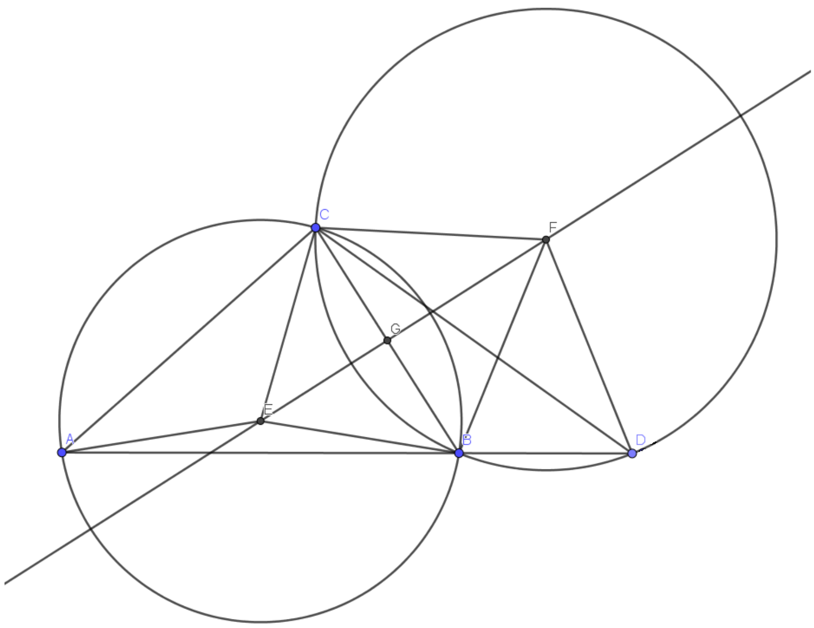
   Avendo 8 luci accese, ho due righe senza luci accese e una colonna senza luci accese. Posso scegliere le 2 righe senza luci in $\binom{6}{2} = 15$ modi differenti e la colonna senza luci in 5 modi differenti. Mi rimangono 4 righe e 4 colonne con 2 luci accese in ciascuna. Nella prima tra queste 4 righe (da ora in poi prima riga) posso scegliere in 6 modi diversi le colonne in cui accendere 2 luci (chiamo A e B le colonne). Posso scegliere in 3 modi l'altra riga in cui accendere una luce nella colonna A (e la chiamerò riga X). La seconda luce accesa nella colonna B può essere nella riga X o meno. Se è nella riga X, allora non ho altre luci accese nella riga X e neppure nella prima riga, inoltre non ho altre luci accese nemmeno nelle colonne A e B. Quindi le 4 rimanenti luci accese sono in posizioni obbligate. Se non è nella riga X: posso scegliere in 2 modi distinti la riga in cui posizionare la seconda luce accesa nella collonna B. Inoltre posso scegliere in due modi distinti la seconda luce accesa nella riga X. Per ciascuna di queste $2{\cdot}2 = 4$ scelte ho due righe e due colonne con 2 luci accese ciascuna (ma la luce della finestra nella colonna B e riga X non è accesa) e quindi le rimanenti 3 luci accese si troveranno in posizioni obbligate. Le configurazioni possibili sono quindi: $15 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 3 \cdot (4+1) = 6750$.

5. Dal libro "Problem Solving Strategies" di Arthur Engel

   Osserviamo che $n = (\sqrt{50}+7)^{100} + (\sqrt{50}-7)^{100}$ è un numero intero e che $(\sqrt{50}-7)^{100} = \frac{1}{(\sqrt{50}+7)^{100}} < (\frac{1}{10})^{100}$. Dunque $(\sqrt{50}+7)^{100} = n - (\sqrt{50}-7)^{100} > n - (\frac{1}{10})^{100}$, cioè il numero in esame ha almeno 100 cifre 9 dopo la virgola, quindi la somma delle prime cifre dopo la virgola è 900.

6. Gara a squadre finale, Stage Olimpico di Lucca (2/3/2010, problema 8)

   La situazione è illustrata nella figura seguente:



   Siano E il circocentro di ABC, F il circocentro di BCD e G il punto medio di BC. Si ha che $\overline{AE} = \overline{EC} = \overline{EB} = R_1$ e $\overline{CF} = \overline{BF} = \overline{DF} = R_2$. I triangoli EFG e EBG sono congruenti poiché sono entrambi rettangoli in G e poiché hanno rispettivamente congruenti un cateto e l'ipotenusa. Stessa cosa per i triangoli CGF e BGF. Da ciò segue che $C\widehat{E}G = B\widehat{E}G = \frac{1}{2}{\cdot}B\widehat{E}C$ e che $C\widehat{F}G = B\widehat{F}G = \frac{1}{2}{\cdot}B\widehat{F}C$. Ora, $C\widehat{E}B = 2{\cdot}C\widehat{A}B$ (poiché sono rispettivamente angolo al centro e angolo alla circonferenza che insistono sullo stesso arco) da cui segue che $C\widehat{E}G = C\widehat{A}B$. Analogamente, $C\widehat{F}B = 2 \cdot C\widehat{D}B$, da cui segue che $C\widehat{F}G = C\widehat{D}B$. I triangoli ADC e CEF sono quindi simili poiché hanno gli angoli congruenti, dunque $\frac{R_1}{R_2} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{127}{310}$. La risposta è pertanto 0437.

7. Dal libro "Problems in Number Theory" di Peter Vandendriessche, Hojo Lee

   Scriviamo n come $n = k^2 + r$ con $0 \le r < 2k+1$. In questo caso $\lfloor \sqrt{n} \rfloor | n$ si riduce a $k | k^2 + r$, cioè $r \in \{0, k, 2k\}$. La somma richiesta è dunque

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}) = \frac{7}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

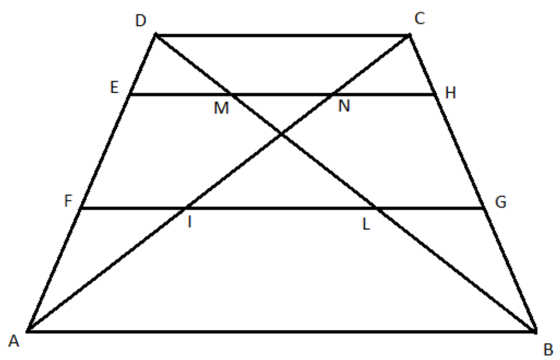
   Sapendo che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ il problema è risolto. In alternativa basta stimare con precisione sufficiente la somma:

$$3 + \frac{1}{3} = \frac{7}{4} + 1 + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} < \frac{7}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{7}{4} + 1 + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k} = 3 + \frac{1}{2}.$$

   Ciò mostra che $N = 3$ e $M = 2$.

8. Gara di Matematica on-line (9/11/2015, problema 13)

   La situazione è quella rappresentata in figura:



   Sappiamo che $\overline{EM} = \overline{MN} = \overline{NH}$ e $\overline{FI} = \overline{IL} = \overline{LG}$. Indichiamo inoltre con h_1 l'altezza del triangolo ABC relativa alla base AB, con h_2 l'altezza del triangolo CGI relativa alla base GI e con h_3 l'altezza del triangolo CNH relativa alla base NH. Poiché i triangoli ABC, CGI e CNH sono simili, si ha che:

$$\frac{AB}{h_1} = \frac{GI}{h_2} = \frac{NH}{h_3}$$

   Considero ora i triangoli BCD, MHB e BGL: anch'essi sono simili e dunque si ha che:

$$\frac{DC}{h_1} = \frac{MH}{h_1 - h_3} = \frac{GL}{h_1 - h_2}$$

Ricordando inoltre che $MH = 2NH$ e che $GI = 2GL$, le due uguaglianze precedenti diventano:
$$\frac{AB}{h_1} = \frac{2GL}{h_2} = \frac{NH}{h_3}$$
$$\frac{DC}{h_1} = \frac{2NH}{h_1 - h_3} = \frac{GL}{h_1 - h_2}$$
Dalla prima equazione segue che $GL = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_2}{h_1} \cdot AB$, mentre dalle seconda equazione segue che $GL = \frac{h_1 - h_2}{h_1} \cdot DC$. Uguagliando le due quantità trovate si ottiene che $\frac{h_1}{h_2} = \frac{7}{4}$, da cui segue che $GL = 24$. Con un procedimento analogo ricaviamo NH dalla prima e dalla seconda equazione: $NH = \frac{h_3}{h_1} \cdot AB$ e $NH = \frac{1}{2} \frac{h_1 - h_3}{h_1} \cdot DC$. Uguagliando queste due quantità si ottiene che $NH = 21$. In conclusione, $FG + EH = 3(GL + NH) = 3(21 + 24) = 3 \cdot 45 = 135$. Quindi la risposta è 0135.

9. Gara di Matematica on-line (9/11/2015, problema 10)

   Il polinomio di terzo grado $x^3 - 33x^2 + 315x - k$ ha due sole radici reali solo se una delle due ha molteplicità doppia. Dunque indichiamo con a, a, b le tre radici del polinomio. La somma delle radici è uguale al coefficiente del termine di secondo grado cambiato di segno, dunque si ha che $a + a + b = 2a + b = 33$. Inoltre sappiamo che la somma dei prodotti a due a due delle radici è uguale al coefficiente della x, ovvero 315: $a \cdot a + a \cdot b + a \cdot b = a^2 + 2ab = 315$. Risolvendo quindi un sistema di due equazioni in due incognite troviamo che le soluzioni possono essere $a = 7$, $b = 19$, oppure $a = 15$, $b = 3$. Ricordando ora che il termine noto del polinomio cambiato di segno è uguale al prodotto delle radici, otteniamo che $k = a^2 b$, da cui si ricava che i due valori possibili di k sono 931 e 675. Quindi la risposta è 1606.

10. Scritto da Francesco Lucianò

    La soluzione è il nono numero di Catalan: $C_9 = \frac{1}{10} \cdot \binom{18}{9} = 4862$.

11. Finale Nazionale, Cesenatico (7/5/2005, problema 5)

    Poiché $\frac{\overline{AC}}{2} = \overline{MN}$, la relazione fornita dal testo diventa $\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 = \overline{MN}^2$, che equivale ad affermare che il triangolo NOM è rettangolo in O. Il circocentro è il punto di intersezione degli assi e dunque anche gli angoli $B\widehat{N}O$ e $B\widehat{M}O$ sono retti. Da ciò segue immediatamente che il triangolo ABC è rettangolo in B. Il circocentro O di ABC si trova quindi sul punto medio di AC. Possiamo ora ricavare l'area e il semiperimetro di ABC, e quindi il raggio della circonferenza inscritta:

    $$r = \frac{A}{p} = \frac{\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2}}{\frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}}{2}} = \frac{\frac{176 \cdot 2 \cdot 210 \cdot 2}{2}}{210 + 176 + \sqrt{210^2 + 176^2}} = \frac{176 \cdot 210 \cdot 2}{210 + 176 + 274} =$$

    $= \frac{73920}{660} = 112$. Quindi la risposta è 0112.

12. Dal libro "Problem Solving Strategies" di Arthur Engel

Rappresentiamo i numeri scelti come tangenti di opportuni angoli nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. In particolare $x = \tan\theta$, $y = \tan\phi$ e la richiesta diventa

$$0 \leq \frac{\tan\theta - \tan\phi}{1 + \tan\theta\tan\phi} = \tan(\theta - \phi) \leq \tan\frac{\pi}{6}$$

ovvero

$$0 \leq x - y \leq \frac{\pi}{6}.$$

L'intervallo considerato ha ampiezza π, quindi occorrono e bastano 7 numeri reali per averne due che differiscono per non più di $\frac{\pi}{6}$.

13. Putnam 2017

N non può essere scritto nella forma $N = a + (a+1) + \cdots + (a+k-1) = ka + \frac{(k-1)k}{2}$ per $k > 1$ e $k \neq 2017$, quindi per ogni tale k deve esistere un b_k tale che

$$kb_k + \frac{(k-1)k}{2} < N < k(b_k + 1) + \frac{(k-1)k}{2}$$

da cui

$$b_k < \frac{N}{k} - \frac{k-1}{2} < b_k + 1$$

e

$$\frac{N}{k} - \frac{k+1}{2} < b_k < \frac{N}{k} - \frac{k-1}{2}$$

Se k fosse un divisore dispari di N diverso da 2017 si avrebbe che b_k è compreso tra due interi consecutivi, che è assurdo. Inoltre con $k = 2017$ si vede che $2017|N$. Quindi $N = 2017 \cdot 2^h$, con $h \geq 0$. Vediamo quali valori di h sono accettabili: se per qualche $k \neq 2017$ e $k > 1$ si ha

$$2017 \cdot 2^{h+1} = (2a + k - 1)k$$

esattamente uno dei due fattori deve essere dispari, quindi deve essere 2017. Allora $k = 2^{h+1}$ e $2a + k - 1 = 2017$. Questo diventa impossibile non appena $h \geq 10$, vediamo quindi se $N = 2017 \cdot 2^{10}$ va bene. Con $k = 2017$ si ottiene $2^{11} = 2a + 2017 - 1$ da cui $a = 16$, che è chiaramente il valore minimo.

14. Inventato da Matteo Nesi

Sia $\eta = e^{\frac{2\pi}{2017}}$ una radice 2017-esima dell'unità. Allora $p(\eta) = p(\eta^2) = \cdots = p(\eta^{2016})$ e $p(1) = 2017^{2017}$. Inoltre

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2016\cdot2017}$$
$$p(\eta) = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + \cdots + a_{2016\cdot2017}\eta^{2016\cdot2017}$$
$$\vdots$$
$$p(\eta^{2016}) = a_0 + a_1\eta^{2016} + a_2(\eta^{2016})^2 + \cdots + a_{2016\cdot2017}(\eta^{2016})^{2016\cdot2017}$$

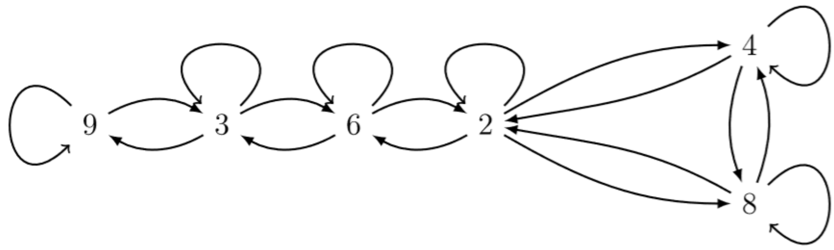
Sommando tutte le equazioni si ottiene:

$$2017^{2017} = p(1) + \cdots + p(\eta^{2016}) = 2017(a_0 + a_{2017} + \cdots + a_{2016\cdot2017}$$

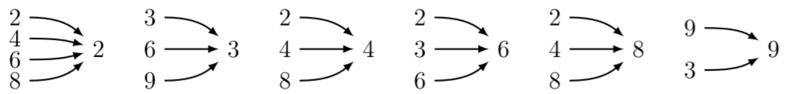
Calcolando le ultime quattro cifre di 2017^{2016} si ottiene 4481.

15. Gara Provinciale (Marzo del 2012)

Il problema richiede di trovare il numero di percorsi con otto archi nel grafo



che partono e arrivano in 9. Per contarli, conviene spezzare il percorso a metà con due cammini, ciascuno da quattro archi: $9 \to n \to 9$, dove n è il numero su cui si arriva dopo il quarto arco. Perciò la soluzione sarà la $\sum_{n=2,3,4,6,8,9} p(9,n)^2$ dei quadrati dei numeri di percorsi $p(9,n)$ di quattro archi da 9 a n nel grafo sopra. In?ne, per contare ciascun $p(9,n)$ conviene notare che il primo arco deve arrivare in uno tra 9 e 3, mentre gli ultimi archi saranno



Basta ora contare in quanti cammini di due archi si possono collegare i primi archi con gli ultimi. Si trova la seguente tabella

nodo di partenza	3	9	3	9	3	9	3	9	3	9	3	9
numero di cammini	1	0	3	2	0	0	2	1	0	0	2	2
nodo di arrivo	2	2	3	3	4	4	6	6	8	8	9	9

Si trova così che

n	2	3	4	6	8	9
$p(9,n)$	4	12	1	9	1	9

Perciò la somma richiesta è $4^2 + 12^2 + 1^2 + 9^2 + 1^2 + 9^2 = 324$.

16. IMO 2000 shortlist

Per la soluzione si rimanda a `https://mks.mff.cuni.cz/kalva/short/soln/sh00a7.html`.