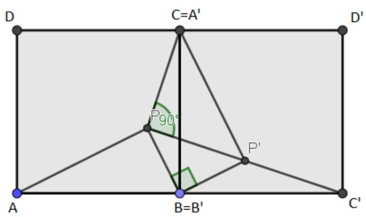
Soluzioni Terza gara Suole di Gauss

22 febbraio 2018

1. **Risposta:** 0005
   Problema proposto agli incontri di preparazione alle olimpiadi della Matematica, Dipartimento di Matematica Ulisse Dini, Firenze.
   Immaginiamo di ruotare il quadrato $ABCD$ di 90° in senso orario rispetto al vertice B. Come si vede dalla figura, $\overline{BP} = \overline{BP'} = 1$. Poiché l'angolo $P\widehat{B}P'$ è retto, $\overline{PP'} = \sqrt{2}$. Adesso, nel triangolo $PP'C$, $\overline{PP'} = \sqrt{2}$, $\overline{PC} = \sqrt{2}$ e $\overline{P'C} = 2$. Da ciò segue immediatamente che l'angolo $C\widehat{P}P'$ è retto. Dunque, l'angolo $C\widehat{P}B$ misura $90° + 45° = 135°$. Usando ora il teorema di Carnot, troviamo che $\overline{BC}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{PB}^2 - 2 \cdot \overline{PC} \cdot \overline{PB} \cdot \cos C\widehat{P}B$, ovvero $\overline{BC}^2 = 2 + 1 + 2 \cdot \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 2 + 1 + 2 = 5$, che è proprio l'area del quadrato $ABCD$.



2. **Risposta:** 0340
   Corso di preparazione alle Olimpiadi della Matematica, Gara a squadre, 17 dicembre 2014.
   Si ha che $C\widehat{A}B = 60°$ e $A\widehat{B}C = 45°$, dunque $A\widehat{C}B = 75°$. Sia TH l'altezza relativa alla base AB del triangolo ABT. Poiché $\overline{AT} = 24$, $\overline{AH} = 12\sqrt{3}$ e $\overline{TH} = 12$. Ora, il triangolo BHT è isoscele su base BT e dunque $\overline{BH} = 12$ e $\overline{BT} = 12\sqrt{2}$. Il triangolo ABT è isoscele su base TC, e dunque anche $\overline{AC} = 24$. Possiamo ora calcolare l'area di ABC con la formula trigonometrica per l'area:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AB} \cdot B\widehat{A}C = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot (12 + 12\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 12 \cdot (1 + \sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 72 \cdot (\sqrt{3} + 3) = 340,7$$

3. **Risposta:** 0057
   Corso di preparazione alle Olimpiadi della Matematica, Gara a squadre, 17 dicembre 2014 Problema proposto agli incontri di preparazione alle

olimpiadi della Matematica, Dipartimento di Matematica Ulisse Dini, Firenze.
Occupiamoci intanto di definire la distanza tra due rette sghembe nello spazio tridimensionale. Per fare ciò, si considera un piano che contenga una delle due rette e che sia parallelo all'altra: a questo punto, la distanza tra le due rette è semplicemente la distanza tra il piano individuato e la retta che questo non contiene. Detto ciò, fissiamo un sistema di riferimento cartesiano, come in figura. Il punto A ha coordinate (0,0,1), il punto B ha coordinate (0,1,0), il punto C ha coordinate (0,0,0) e il punto D ha coordinate (1,1,0). Dobbiamo quindi determinare la distanza tra la retta che contiene $\overline{AB}$ (che chiamiamo r) e la retta che contiene $\overline{CD}$ (che chiamiamo s). Allora l'equazione parametrica della retta r è

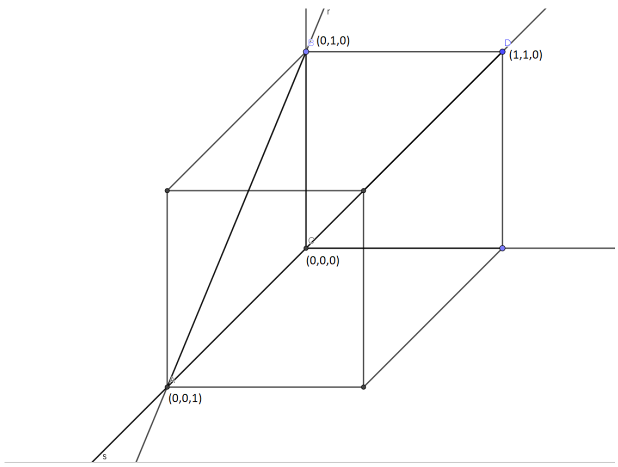
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \tag{1}$$

Analogamente, l'equazione parametrica della retta s è:

$$\begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Osserviamo ora che il piano π di equazione $-x+y+z=0$ contiene la retta s ed è parallelo alla retta r. Dunque la distanza tra r e s è semplicemente la distanza tra π e r, che è a sua volta uguale alla distanza tra π e un qualsiasi punto di r (ad esempio, il punto A). Questa può essere trovata facilmente con la formula per la distanza punto-piano:

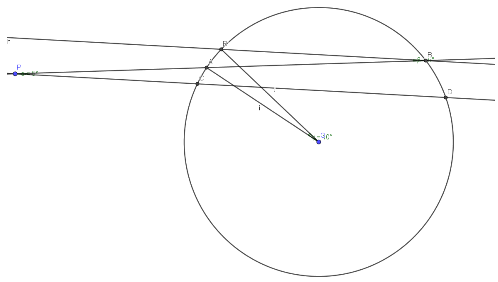
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,57$$



4. **Risposta:** 0011
Problema proposto agli incontri di preparazione alle olimpiadi della Matematica, Dipartimento di Matematica Ulisse Dini, Firenze.

La situazione è quella rappresentata in figura, con l'arco AC che misura 2 e l'arco BD che misura 4. Tracciamo la retta passante per B e parallela a CD e chiamiamo B' il punto in cui questa interseva la circonferenza. Ora si ha che $P\widehat{B}B' = 5°$ (angoli alterni interni) e che l'arco CB' misura 4. Quindi l'arco AB' misura 2. L'angolo al centro $A\widehat{O}B'$ misura 10° e quindi il raggio della circonferenza è dato da:

$$r = \frac{AB'}{\alpha_{rad}} = \frac{2}{\frac{\pi}{18}} = \frac{36}{\pi} \simeq 11$$



5. **Risposta:** 1475
Tratto dalla Gara di Marzo 2012
Si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} x \equiv 19 \mod 56 \\ x \equiv 23 \mod 132 \\ x \equiv 13 \mod 105 \\ x \equiv 17 \mod 162 \\ x \equiv 38 \mod 156 \end{cases} \tag{3}$$

in cui qualche equazione è errata.
Grazie al Teorema Cinese dei Resti, esistono soluzioni in un sistema

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \mod n_1 \\ . \\ . \\ . \\ x \equiv a_k \mod n_k \end{cases} \tag{4}$$

come quello sopra se e solo se

$$a_i = a_j \text{mod}(\text{ged}(n_i,n_j)) \; i,j = 1...k$$

Si osservi che la terza e la quinta equazione non sono compatibili con nessuna delle altre, quindi risultano essere false grazie all'aermazione del barista. Inoltre, un sistema di sole 2 delle 3 rimanenti equazioni ha soluzioni multiple tra 0 e 10000. Si consideri ora

$$\begin{cases} x = 19 \; mod 56 \\ x = 23 \; mod 132 \end{cases} \tag{5}$$

e lo si risolva: per trovare k, h numeri interi tali che $56k+19 = 132h+23$, si nota che quella condizione è equivalente a $14k33h = 1$ e che $7 \cdot 143 \cdot 33 = 98 + 99 = 1$, cioè si possono prendere $k = 7$ e $h = 3$. Quindi sostituendo

$x = 7{\cdot}56 + 19 = 1475$ Si noti ora che x soddisfa anche la quarta equazione. Inoltre tutte le altre soluzioni sono congrue a 1475 mod(lcm(56,132,162)) e lcm(56,132,162) $= 49896$.
La soluzione è quindi 1475

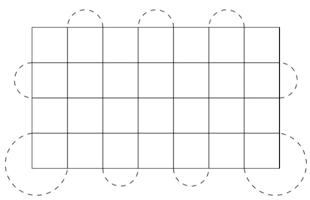
6. **Risposta:** 0210
Tratto dalla Gara di Marzo 2015
Due osservazioni molto utili per svolgere l'esercizio; la prima è la seguente: se un numero primo è a specchio, allora è palindromo. Inoltre, i numeri minori che terminano con 5 e che sono a specchio sono facili da verificare. Dalla prima osservazione, si ha che tra i numeri minori di 300 i numeri primi a specchio sono 11, 101, 131, 151, 181, 191 . Di conseguenza, tra i numeri minori di 103, solo negli intervalli]47,53[e]53,59[possono esserci 5 numeri a specchio consecutivi. In]47,53[e]53,59[ci sono, rispettivamente, 51 e 54 che non sono a specchio. Per i numeri compresi tra 103 e 199, gli intervalli in cui possono comparire 5 numeri a specchio consecutivi sono soltanto]115,127[,]131,137[,]139,145[,]157,163[,]167,173[,]185,191[. In ciascuno di questi intervalli, si trovano i numeri 118 e 122 nel primo, poi rispettivamente 142, 160, 170, 188 che non sono a specchio. Dunque non c'è una sequenza di 5 numeri a specchio. Nell'intervallo]205,211[206, 207, 208, 209 e 210 sono tutti a specchio.

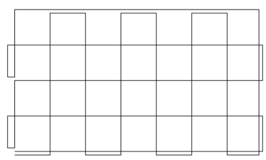
7. **Risposta:** 0046
Tratto dalla Gara di Marzo 2015
Si devono contare le coppie ordinate (p, n), con p primo e $n \leq 200$ intero positivo, tale che $p^2 + np = k^2$, per qualche k intero. Dato che $p^2 + np = p(p + n)$, si vede subito che, se $p^2 + np = q^2 + lq$, allora $p = q$ e $n = l$. Inoltre deve essere $p|k^2$; dunque $p|k$ poichè p è primo, cioè $k = mp$ per un unico intero positivo m. Sostituendo otteniamo $p + n = m^2p$. Allora $n = (m^2 - 1)p$. Osserviamo subito che $2 \leq m \leq 10$, perché sennò $(m^2$ $1)p \geq 2(\mathrm{m}^2\ \ 1) \geq 120{\cdot}2 = 240$.

m	$(m^2 - 1)p$	$\max\{p \mid p \text{ primo}, (m^2-1)p \leq 200\}$	coppie
2	$3p$	61	18
3	$8p$	23	9
4	$15p$	13	6
5	$24p$	7	4
6	$35p$	5	3
7	$48p$	3	2
8	$63p$	3	2
9	$80p$	2	1
10	$99p$	2	1
		totale	46

8. **Risposta:** 4938
Tratto dalla gara di Marzo 2007

Supponiamo di avere una griglia axb. Intanto la lunghezza complessiva delle strade è $a(b+1)+(a+1)b = 2ab+a+b$. Supponiamo poi, come nel caso particolare dell'esercizio, che a sia dispari e b pari. Il problema del percorso minimo riguarda in particolare i nodi della griglia in cui confluiscono un numero dispari di strade (in questo caso tutti gli incroci sul perimetro esclusi i quattro vertici, nei quali confluiscono solo due strade). Almeno una strada di questi nodi deve essere infatti percorsa più di una volta. Conviene quindi unire tra loro a coppie tali nodi con un percorso minimo. Un possibile modo di unirli è mostrato nella prima figura; da qui si evince che un tratto di strada pari ad almeno $a+b$ deve essere percorso due volte. La lunghezza totale del percorso di Paolo deve essere pari ad almeno $2ab+a+b+a+b = 2(ab+a+b)$. Resta solo da dimostrare che questa stima è ottimale, ovvero che esiste almeno un percorso lungo $2(ab+a+b)$. Tale percorso, nel caso $a = 7$ e $b = 4$ è mostrato nella seconda figura, ma è facilmente generalizzabile. Risulta quindi che la risposta è $2(64 \cdot 37 + 64 + 37)$, ovvero 4938 . Nota: tale soluzione vale anche nel caso a, b entrambi pari, mentre nel caso a, b entrambi dispari si può trovare un percorso lungo $2(ab+a+b-1)$.





partenza

9. **Risposta:** 2491
   Tratto dalla Gara di Marzo 2013
   Il numero di casi totali è 10^5. Le sequanze accettate devono essere del tipo ABBBB, AABBB, AAABB, AAAAB. Notiamo che la prima e la quarta sono "speculari", così come la seconda e la terza. Basterà quindi contare i casi della prima e della seconda e poi moltiplicare per 2. In entrambi i casi possiamo scegliere il primo numero in 10 modi e il secondo in 9 modi. La somma sarà quindi pari a $(10 \cdot 9 + 10 \cdot 9) \cdot 2 = 360$. $\frac{360}{10^5} = \frac{9}{2500}$. $2500 - 9 = 2491$.

10. **Risposta:** 2187
    Tratto dalla Gara di Marzo 2009
    Il gioco termina certamente entro tre turni di coppie di lanci dato che, ad ogni coppia di turni, viene certamente eliminato almeno un giocatore. Si possono schematizzare le eliminazioni possibili ad ogni lancio come segue

lancio	1	2	3	4	5	6
risultato	I 0	I II	I 0	I II	I 0	I II

in cui i due simboli assegnati al lancio stanno a indicare le due possibilità del lancio (I e 0 vuol dire che o viene eliminato un giocatore della prima squadra o nessuno, I e II che o viene eliminato uno della prima squadra o uno della seconda).
Le sequenze che danno la vittoria alla prima squadra devono contenere almeno due segni II e al massimo un segno I prima del secondo segno II. Se II è in seconda e quarta posizione, allora le ultime due posizioni possono contenere qualunque segno, e un solo segno I può comparire in prima o in terza posizione. Se II non è in seconda o in quarta posizione, allora nelle posizioni dispari deve comparire il segno 0. Alla fine, su 64 sequenze possibili, quelle che denotano vittoria per la prima squadra sono $2 \cdot 2 \cdot 3 + 2 = 14$. Perciò la probabilità di vittoria è $\frac{14}{64} = \frac{7}{32} = 0.21875$.

11. **Risposta:** 8750
Tratto dalla Gara di Marzo 2014
Fabio deve totalizzare un punteggio di 7. Usando i dadi a 4 e 6 facce ha a disposizione gli accoppiamenti $1+6, 2+5, 3+4, 4+3$. Ogni accoppiamento ha probabilità pari a $\frac{1}{4}\cdot 1_{\overline{6}} = \frac{1}{24}$ di capitare. Poichè i risultati favorevoli sono 4, va moltiplicato per 4: $\frac{1}{24}\cdot 4{=}1_{\overline{6}}$. Con i dadi a 6 e 8 facce i casi favorevoli sono 6, e ognuno di questi ha probabilità $\frac{1}{6}\cdot 1_{\overline{8}}$ di capitare: $\frac{1}{6}\cdot 1_{\overline{8}}\cdot 6{=}1_{\overline{8}}$. Infine, coi dadi a 4 e 8 facce ci sono 4 casi favorevoli ognuno con probabilità $\frac{1}{4}\cdot 1_{\overline{8}}$, quindi $\frac{1}{4}\cdot 1_{\overline{8}}\cdot 4{=}1_{\overline{8}}$. La probabilità maggiore di vittoria per Bianca è quindi 1 - $\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ $= 0.8750$

12. **Risposta:** 2047
$f(1024) = 2f(512)+1 = 2\cdot(2f(256)+1)+1 = 4f(256)+2+1 = 4(2f(128)+1)+2+1 = 8f(128)+4+2+1 = \cdots = 1024f(1)+512+256+128+\cdots+4+2+1 = 2^{10}+2^9+\cdots+2+1 = 2^{11}-1 = 2047$

13. **Risposta:** 2378
Università di Roma Tor Vergata, 26 Marzo 2009, Gara a Squadre.
Osserviamo che la frazione può essere semplificata: infatti, $3+2\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^2$.
Dunque ci resta da calcolare $(1+\sqrt{2})^{11}$.
$(1+\sqrt{2})^{11} = (1+\sqrt{2})^{10}\cdot(1+\sqrt{2}) = (3+2\sqrt{2})^5\cdot(1+\sqrt{2}) =$
$(3+2\sqrt{2})^2\cdot(3+2\sqrt{2})^2\cdot(3+2\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{2}) = (9+8+12\sqrt{2})^2\cdot(3+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+4) =$
$(17+12\sqrt{2})\cdot(7+5\sqrt{2}) = (289+288+408\sqrt{2})\cdot(7+5\sqrt{2}) = (577+408\sqrt{2})\cdot(7+5\sqrt{2})$.
Ora osserviamo che $a = 577\cdot 7 + 408\cdot 2\cdot 5$ e che $b = 7\cdot 408 + 577\cdot 5$. Dunque $a-b = 577\cdot 7+408\cdot 10-408\cdot 7-577\cdot 5 = 577\cdot 2+408\cdot 3 = 1154+1224 = 2378$.

14. **Risposta:** 1935
Università di Roma Tor Vergata, 7 Aprile 2008, Gara a Squadre.
Se, partendo da 25, scriviamo in successione i numeri che si ottengono applicando la funzione F otteniamo:

$$25 \to 100 \to 27 \to 102 \to 29 \to 104 \to \ldots$$

Quindi l'effetto di F sui numeri pari è quello di sottrarre 73. In conclusione, $F(2008) = 200873 = 1935$. Si osservi che l'applicazione di F ai numeri dispari aggiunge invece 75.

15. **Risposta:** 1009
Ispirato da IMO 1973 - Shortlist
Per fattorizzare il polinomio in questione è sufficiente trovare tutte le sue radici. Tramite la sostituzione $y = x^m$ si ottengono le radici

$$y_{1,2} = |a|^m \cos(\theta) \pm \sqrt{a^{2m}\cos^2(\theta) - a^{2m}} = |a|^m(\cos(\theta) \pm i\sin(\theta))$$

A questo punto, per ottenere le radici, basta estrarre la radice m-esima:

$$x_k = |a|(\cos(\frac{\theta}{m} + \frac{2k\pi}{m}) + i\sin(\frac{\theta}{m} + \frac{2k\pi}{m}))$$

$$\overline{x_k} = |a|(\cos(\frac{\theta}{m} + \frac{2k\pi}{m}) - i\sin(\frac{\theta}{m} + \frac{2k\pi}{m}))$$

per $k \in \{0, \ldots, m-1\}$. Osserviamo che $(x-x_k)(x-\overline{x_k}) = x^2 - 2\mathfrak{Re}(x_k)x + |x_k|^2$, cioè $(x - x_k)(x - \overline{x_k}) = x^2 - 2|a|\cos(\frac{\theta}{m} + \frac{2k\pi}{m})x + |a|^2$. Quindi tutti i termini noti dei fattori reali di secondo grado di $p(x)$ sono uguali a $|a|^2$, cioè a $\frac{1}{2}$, da cui la risposta.

16. **Risposta:** 0002
Tratto da una gara polacca del 2003
Notiamo che, in generale, se $p(x)$ è un polinomio a coefficienti interi, $d|p(n+d) - p(n)$, per ogni coppia di interi (d, n). Supponiamo, ora, per assurdo che, fissato n, esista un numero primo tale che $p|W(n)$. Ma $W(n)|2^n - 1$, quindi $p|2^n - 1$ e per l'osservazione iniziale $p|W(n+p) - W(n)$, da cui $p|W(n+p)$ e quindi $p|2^{n+p} - 1$. Ma allora p deve essere dispari e, per differenza, $p|2^{n+p} - 2^n$, cioè, vista che p è dispari $p|2^p - 1$, che è assurdo, poiché per il piccolo teorema di Fermat si ha che $p|2^p - p$, da cui, ancora una volta per differenza, $p|p-1$, che è assurdo. Quindi gli unici polinomi che possono andare bene sono quelli costantemente uguali a 1 o a -1. Questi vanno effettivamente bene.