Soluzioni auarta gara Suole di Gauss

13 Marzo 2018

1. **Risposta:** 2618
   Coppa Hilbert, Parma, 22 Aprile 2002, problema 8
   Visto che i lati sono in progressione geometrica, indichiamo con a il cateto minore e con b la ragione della progressione. Allora il secondo cateto misura $a \cdot b$ e l'ipotenusa $a \cdot b^2$. Per il teorema di pitagora, si ha quindi che $a^2 + a^2 \cdot b^2 = a^2 \cdot b^4$, che risolta dà come soluzioni $b^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.L'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è quindi $a^2 \cdot b^4 = 1000 \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = 1000 \cdot 2,618 = 2618$.

2. **Risposta:** 9747
   Coppa Fermat, 12 Marzo 2010, problema 6
   Sia k il lato del lago. La figura formata dai recinti è un quadrato. L'altezza di ciascun triangolo equilatero è $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot k$ e la diagonale del quadrato formato dai recinti è $k(1+\sqrt{3})$. Dunque l'area del recinto totale è $k^2 \cdot \frac{(1+\sqrt{3})^2}{2} = k^2 \cdot (2+\sqrt{3})$ metri quadrati, quella del lago k^2 metri quadrati, quella dei 4 triangoli $4k^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = k^2 \cdot \sqrt{3}$ metri quadrati, si ha che l'area dei terreni incolti è $k^2 m^2$.

3. **Risposta:** 2560
   Coppa Gauss, 6 Marzo 2015, problema 23
   Si costruiscono le parallele $NP \| AC$, con P su AB, $NQ \| AB$, con Q su AC, $MR \| AC$ con R suAB e $MT \| AB$ con T su AC. Si ottengono le relazioni $\frac{\overline{BN}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{PN}}{\overline{AC}}$ e $\frac{\overline{BC}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{NQ}}$. Perciò

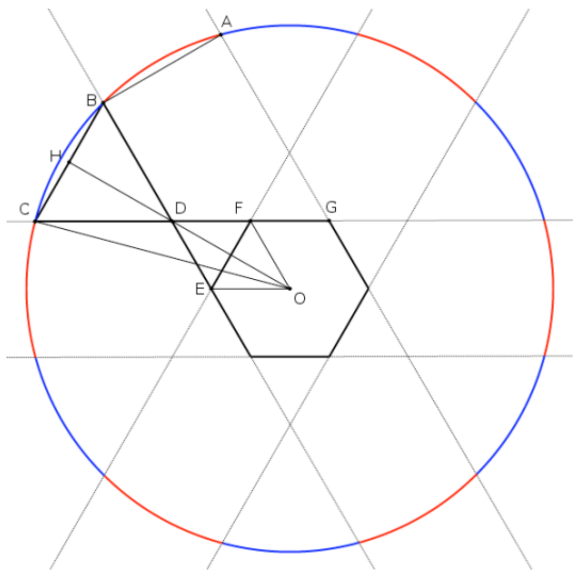
   $$\frac{\overline{BN}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{PN} \cdot \overline{AB}}{\overline{AC} \cdot \overline{AP}}$$

   .Inoltre, gli angoli $A\widehat{T}M$ e $A\widehat{P}N$ sono uguali in quanto angoli opposti di un parallelogrammo. Perciò i triangoli APN e ATM sono simili; quindi $\frac{\overline{AP}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{PN}}{\overline{TM}}$. Ne risulta $\frac{\overline{AP}}{\overline{PN}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{TM}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$. In conclusione $\frac{\overline{BN}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = (\frac{8}{5})^2 = 2.56$.

4. **Risposta:** 0334
   Coppa Fermat, Genova, 24 Marzo 2006, problema 24
   Possiamo ridurre il problema ad uno a due dimensioni guardando la scena dall'alto: il cartellone è un esagono regolare e Michela un punto del piano. Conviene rovesciare la situazione e considerare l'esagono fermo e Michela in movimento circolare a velocità costante su una circonferenza con centro

nel centro dell'esagono. La richiesta del problema è esattamente la lunghezza del raggio di tale circonferenza. Una faccia del cartellone (un lato dell'esagono) è visibile da Michela quando lei si trova nel semipiano che ha come origine la retta determinata dalla faccia del cartellone e che non contiene l'esagono. Tracciando i prolungamenti di ciascun lato, si determinano sulla circonferenza due tipi di archi: quelli nei quali Michela vede 3 cartelloni e quelli in cui vede 2 cartelloni, ad esempio nell'arco AB vede 2 cartelloni. La condizione che la velocità di rotazione sia costante diventa la richiesta che la lunghezza degli archi in cui si vedono 3 cartelloni sia uguale a quella degli archi dove se ne vedono 2, in figura gli archi AB e BC hanno la stessa lunghezza ed le corde corrispondenti sono uguali. La corda AB ha la stessa lunghezza del segmento EG, cioè $\sqrt{3}m$. Quindi il triangolo equilatero BCD ha lato $\sqrt{3}m$, perciò $\overline{HD} = 32m$. Anche i triangoli DEF e EFO sono equilateri, di lato $1m$, da cui $\overline{OD} = \sqrt{3}m$. Dato che il triangolo HOC è rettangolo,

$$\overline{OC} = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\sqrt{3}+\frac{3}{2})^2} = \sqrt{6+3\sqrt{3}} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{3}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \approx 3,34m$$



5. **Risposta:** 0032
Coppa Galileo 2013, problema 10
$f(x+y) = f(x) + f(y)$. Sostituendo in questa formula $x = 0$ e $y = 0$, si ottiene che $f(0+0) = f(0)+f(0)$, ovvero $f(0) = f(0)+f(0)$, da cui $f(0) = 0$. Sostituendo ora $x = 1$ e $y = 1$, si ottiene che $f(1+1) = f(1)+f(1)$, ovvero $f(2) = 2f(1)$. Calcolando $f(3)$ si ottiene $f(3) = f(2+1) = f(2)+f(1) = 2f(1)+f(1) = 3f(1)$. In generale si verifica facilmente che $f(n) = n\cdot f(1)$. Possiamo inoltre ricavare $f(1)$ dalla relazione nota $f(\frac{7}{8}) = \frac{8}{7}$. Infatti, $f(\frac{7}{8}) = \frac{7}{8}\cdot f(1) = \frac{8}{7}$, da cui ricaviamo $f(1) = \frac{64}{49}$. Infine, calcoliamo $f(\frac{49}{2}) = \frac{49}{2}\cdot f(1) = \frac{49}{2}\cdot\frac{64}{49} = 32$.

6. **Risposta:** 0008
Coppa Galileo 2012, problema 12
Il numero i^2 deve essere divisibile per 2, mentre j^2 deve essere divisibile per 3, quindi sicuramente: $i = 2i_1$, $j = 3j_1$. Pertanto si ottiene

$$12i_1^2 + 18j_1^2 = 77 \cdot 6^{2012}$$

$$2i_1^2 + 3j_1^2 = 77 \cdot 6^{2011}$$

Ripetendo questo procedimento, dopo 2011 passaggi analoghi, si deve allora risolvere l'equazione

$$2i_{2012}^2 + 3j_{2012}^2 = 77$$

Qui le scelte sono limitate: j_{2012}^2 può valere solo 0,1,4,16,25. Le effettive soluzioni sono

$$(i_{2012}, j_{2012}) = (\pm 3, \pm 5)(i_{2012}, j_{2012}) = (\pm 5, \pm 1)$$

In totale 8 soluzioni.

7. **Risposta:** 0105
Tratto dalla gara online del 13/02/2017.
Se sommiamo le tre equazioni otteniamo che $2xy + 2xz + 2yz = 64$, cioè $xy + xz + yz = 32$ che ci permette di trovare immediatamente $xy = 5$, $xz = 12$ e $yz = 15$. A questo punto possiamo ricavare una delle incognite, ad esempio $y = \frac{5}{x}$ che sostituita nella terza relazione porta a scoprire $z = 3x$. A questo punto nella seconda si ha che $x^2 = 4$ che ha come unica soluzione ammissibile $x = 2$. La soluzione cercata è $(2, \frac{5}{2}, 6)$. Il valore richiesto dal problema è $10(x + y + z) = 105$.

8. **Risposta:** 0127
Tratto dalla gara online del 13/02/2017.
Siano $a, -a, \frac{1}{a}$ e b le quattro soluzioni dell'equazione. Dalle formule di Viète si ricava che:
$a - a + \frac{1}{a} + b = \frac{117}{18}$, cioè $\frac{1}{a} + b = \frac{13}{2}$
$a \cdot (-a) \cdot \frac{1}{a} \cdot b = -\frac{60}{18}$, cioè $ab = \frac{10}{3}$
$\frac{\alpha}{18} = \frac{b}{a} - a^2$. Dalla seconda si ricava che $\frac{1}{a} = \frac{10}{3}b$ che messa nella prima permette di determinare $b = 5$ e di conseguenza $a = \frac{2}{3}$. $\frac{\alpha}{18} = \frac{b}{a} - a^2 = \frac{5}{\frac{2}{3}} - \frac{4}{9}$, da cui segue $\alpha = 127$.

9. **Risposta:** 0036
Tratto da la prima Disfida Matematica Urbi et Orbi (2011).

10. **Risposta:** 0040
Tratto dal corso di preparazione per le ompiadi di Xiong Bin.
Puoi trovare un abbozzo di soluzione a questo link:
`https://suoledigauss.it/Soluzioni/Problema10.pdf`

11. **Risposta:** 0016
Tratto dal corso di preparazione per le ompiadi di Xiong Bin.
Puoi trovare un abbozzo di soluzione a questo link:
`https://suoledigauss.it/Soluzioni/Problema11.pdf`

12. **Risposta:** 0006
Tratto dal corso di preparazione per le ompiadi di Xiong Bin.
Puoi trovare un abbozzo di soluzione a questo link:
`https://suoledigauss.it/Soluzioni/Problema12.pdf`

13. **Risposta:** 1728
Tratto dalla gara online del 7/11/2016.
Tutte le esche possibii sono date dal numero di esche aventi una coppia di pezzi dello stesso tipo di carne consecutive più tutte quelle non aventi nessuna coppia di pezzi uguali consecutivi. Le prime sono $3 \cdot 7 \cdot 2^6$ (3 modi di scegliere il tipo di carne raddoppiato, 7 modi di scegliere in che punto dell'esca inizia la coppia e 2^6 modi di scegliere i rimanenti 6 pezzi), le seconde sono $3 \cdot 2^7$ (3 modi per scegliere il primo pezzo, 2 per ogni pezzo successivo). Soluzione: $1344 + 384 = 1728$.

14. **Risposta:** 0239
Tratto da Challenging Mathematical Problems With Elementary Solutions, Vol I.
Poiché la probabilità che colpisca da una distanza e il quadrato della distanza sono inversamente proporzionali, il loro prodotto è costante. Tale costante è quindi $k = 5000$. Le probabilità di colpire da 150m e 200m sono dunque rispettivamente $\frac{2}{9}$ e $\frac{1}{8}$. La probabilità che prenda la volpe al primo colpo è $\frac{1}{2}$, la probabilità che la colpisca al secondo è uguale alla probabilità che non l'abbia colpita alla prima, per la probabilità che la colpisca alla seconda: $(1 - \frac{1}{2}) \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$. Infine, la probabilità che la colpisca al terzo colpo è pari alla probabilità che non l'abbia colpita le prime due volte per la probabilità che la colpisca alla terza: $\frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{2}{9}) \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{144}$. Il risultato sarà la somma di queste probabilità: $\frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{7}{144} = \frac{95}{144}$.

15. **Risposta:** 0071
Tratto da Challenging Mathematical Problems With Elementary Solutions, Vol I.
Per quanto riguarda la prima persona, questa può pescare una pallina di qualsiasi colore come prima. La seconda pallina dovrà invece essere di un colore diverso, e la probabilità che lo sia è di $\frac{5}{9}$; con gli altri giocatori viene svolto lo stesso ragionamento. Il risultato sarà quindi $\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{63}$.

16. **Risposta:** 0824
Inventato da Francesco Lucianò.
Il problema è uno dei casi classici di applicazione dei numeri di Stirling di seconda specie. Poiché i capitani sono diversi, il numero di Stirling $S(8, 4) = 1701$ andrà moltiplicato per $4! = 24$, ottenendo 40824.