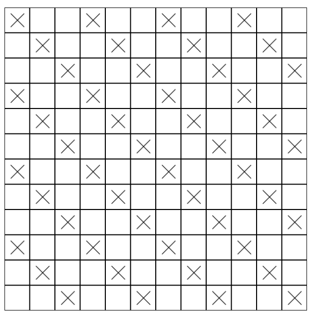
Soluzioni quinta gara Suole di Gauss

26 Marzo 2018

1. **Risposta:** 0014
   Ispirato a una recente gara
   Immaginiamo di lanciare tutti i dadi, tranne quello a 13 facce. Qualsiasi sia la somma ottenuta da questi dadi, ci sarà uno e un solo risultato possibile del dado rimanente tale che la somma finale sia congrua 0 modulo 13. I 13 risultati dell'ultimo dado sono equiprobabili, quindi la probabilità è $\frac{1}{13}$.

2. **Risposta:** 2187
   Ispirato ad un problema della gara di febbraio 2013
   In ogni riga e in ogni colonna della scacchiera devono esserci almeno $243 \div 27 = 9$ trit occupati (nota che le parole sono lunghe 27 trit): questi dividono la riga o colonna in sequenze di trit liberi; se ce ne fossero meno di 9, almeno una di queste sequenze sarebbe lunga 27 o più trit liberi (abbastanza per inserirci una **parola**). Deduciamo dunque che devono esserci almeno $243 \cdot 9 = 2187$ trit occupati. Possiamo anche concludere che questo è il numero minimo che consente di non lasciare sequenze di 27 o più trit liberi, basta occuparli in maniera congrua: in figura una possibile soluzione (in scala ridotta) della distribuzione dei trit occupati.
   Nell'immagine di esempio abbiamo preso in considerazione una griglia $12 * 12$ e parole lunghe 3 trit. La soluzione generica è:

$$\mathit{dimensione\ lato} \cdot \left(\frac{\mathit{dimensione\ lato}}{\mathit{dimensione\ parola}} \right)$$



3. **Risposta:** 0880
   Tratto dalla gara online del 13-02-2017
   Dal totale dei modi possibili, che sono $2^{10} = 1024$, dobbiamo togliere quelli vietati, cioè quelli in cui non vi sono due stelle dorate vicine. Procediamo analizzando i casi.

Tutte stelle rosse 1 possibilità.
1 stella dorata, 9 rosse: $\frac{10!}{9!} = 10$ possibilità;
2 stelle dorate, 8 rosse: nella stringa "RRRRRRRR" dobbiamo inserire due stelle dorate in modo che non siano vicine, abbiamo $\binom{9}{2} = 36$ possibilità.
3 stelle dorate, 7 rosse, ragionamento analogo: $\binom{8}{3} = 56$;
Procediamo nello stesso modo fino a 5 stelle dorate e 5 rosse, che è l'ultimo caso in cui è possibile rispettare la condizione. In totale quindi avremo $1024 - 1 - 10 - 36 - 56 - 35 - 6 = 880$.

4. **Risposta:** 0589
Tratto da "102 combinatorial problems from the training of the USA IMO team" di Titu Andreescu e Zuming Feng.
Sia $n = p^r q^s$, dove p e q sono primi distinti. Allora $n^2 = p^{2r} q^{2s}$, quindi n^2 ha $(2r+1)(2s+1)$ divisori. Per ogni divisore minore di n, c'è un corrispondente divisore maggiore di n. Escludendo n tra i divisori, vediamo che ci devono essere

$$\tfrac{(2r+1)(2s+1)-1}{2} = 2rs + r + s$$

divisori di n^2 che sono più piccoli di n. Poiché n ha $(r+1)(s+1)$ divisori (incluso lo stesso n), e poiché ogni divisore di n divide anche n^2, ci sono

$$2rs + r + s - [(r+1)(s+1) - 1] = rs$$

divisori di n^2 che sono più piccoli di n ma non dividono n. Con $r = 31$ e $s = 19$, abbiamo $rs = 589$ divisori che rispettano la caratteristica.

5. **Risposta:** 8037
Tratto da Challenging Mathematical Problems With Elementary Solutions, Vol I.
Per la soluzione, rimandiamo a
`https://suoledigauss.it/Soluzioni/Esercizio5_QuintaGara.pdf`

6. **Risposta:** 1594
Tratto da "104 number theory problems from the training of the USA IMO team" di Titu Andreescu, Doring Andrica e Zuming Feng.
Per prima cosa, osserviamo che a, b e c devono essere tutti e tre primi dispari; infatti, l'unico primo pari è 2, e se, per esempio, a fosse pari, $a + b - c$ e $a + c - b$ dovrebbero essere entrambi pari, e quindi uguali a 2. Di conseguenza, il più piccolo dei sette primi è almeno 3.
Per seconda cosa, ipotizziamo che $a + b = 800$. Poiché $a + b - c > 0$, dobbiamo avere $c < 800$. Sappiamo anche che c è primo; di conseguenza, poiché $799 = 17 \cdot 47$, abbiamo che $c \leq 797$. Segue che il più grande primo, $a+b+c$, non è più grande di 1597. Combinando questi due limiti, possiamo scrivere $d \leq 1597 - 3 = 1594$.
Rimane da osservare che possiamo scegliere $a = 13, b = 787, c = 797$ per rispettare le condizioni. Gli altri quattro primi sono quindi 3, 23, 1571 e 1597.

7. **Risposta:** 0998
Tratto da "Putnam and beyond" di Razvan Gelca e Titu Andreescu.
Abbiamo

$$mnp = 1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} + 1 =$$

$$= (\tfrac{x}{y} + \tfrac{y}{x})^2 + (\tfrac{y}{z} + \tfrac{z}{y})^2 + (\tfrac{z}{x} + \tfrac{x}{z})^2 \text{ - } 4.$$

Dunque

$$m^2 + n^2 + p^2 = mnp + 4.$$

Aggiungendo $2(mn + np + pm)$ a entrambi i membri dell'equazione si ottiene

$$(m + n + p)^2 = mnp + 2(mn + np + pm) + 4.$$

Aggiungendo ora $4(m + n + p) + 4$ a entrambi i membri abbiamo

$$(m + n + p + 2)^2 = (m + 2)(n + 2)(p + 2).$$

Segue che $(m + 2)(n + 2)(p + 2) = 2004^2$. Ma $2004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$, e una semplice analisi dei casi mostra che le uniche possibilità sono $(m + 2, n + 2np + 2) = (4, 1002, 1002), (1002, 4, 1002), (1002, 1002, 4)$. Le terne cercate sono quindi $(2, 1000, 1000), (1000, 2, 1000), (1000, 1000, 2)$.

8. **Risposta:** 5052
Tratto da gara online 13-02-2017
Osserviamo che $f(-x) = -ax^5 - bx^3 + x^2 - cx + |x| + 1$ e che quindi $f(x) + f(-x) = 2x^2 + 2|x| + 2$. Sostituendo $x = 50$ si ottiene $f(50) + f(-50) = 2 \cdot 50^2 + 2|50| + 2 = 5102$, da cui $f(50) = 5102 - f(-50) = 5102 - 50 = 5052$.

9. **Risposta:** 0099
Tratto da gara online 13-02-2017
Osserviamo che ci sono 3 casi in cui $\lfloor\sqrt{k}\rfloor = 1$, cioè se $1 \leq k \leq 3$ e ciascuna frazione vale $\frac{1}{3}$, la cui somma vale 1.
Abbiamo 5 casi in cui $\lfloor\sqrt{k}\rfloor = 2$, cioè se $4 \leq k \leq 8$ e ciascuna frazione vale $\frac{1}{5}$, la cui somma vale 1.
In generale avremo $2n + 1$ casi in cui $\lfloor\sqrt{k}\rfloor = n$, quando $n^2 \leq k \leq n^2 + 2n$ in cui la frazione vale $\frac{1}{2n+1}$. La somma vale 1.
Dividendo nei 99 casi otteniamo sempre 1 come somma.
La soluzione è quindi 99.

10. **Risposta:** 0046
Tratto dalla Gara a Squadre provinciale 2015
Si devono contare le coppie ordinate (p, n), con p primo e $n \leq 200$ intero positivo, tale che $p^2 + np = k^2$, per qualche k intero. Dato che $p^2 + np = p(p + n)$, si vede subito che, se $p^2 + np = q^2 + lq$, allora $p = q$ e $n = l$. Inoltre deve essere $p|k^2$, dunque $p|k$ poichè p è primo, cioè $k = mp$

per un unico intero positivo m. Sostituendo otteniamo $p + n = m^2 p$. Allora $n = (m^2 - 1)p$. Osserviamo subito che $2 \leq m \leq 10$, perché sennò $(m^2 - 1)p \geq 2(m^2 - 1) \geq 120 \cdot 2 = 240$.

m	$(m^2-1)p$	$\max\{p \mid p \text{ primo}, (m^2-1)p \leq 200\}$	coppie
2	$3p$	61	18
3	$8p$	23	9
4	$15p$	13	6
5	$24p$	7	4
6	$35p$	5	3
7	$48p$	3	2
8	$63p$	3	2
9	$80p$	2	1
10	$99p$	2	1
		totale	46

11. **Risposta:** 0060
    Tratto dalla Gara a Squadre provinciale 2007
    Il cappellino galleggia sull'acqua seguendo la corrente; la barca viaggia a $3km/h$ controcorrente per mezz'ora, poi viaggia a $3km/h$ seguendo la corrente. Dal punto di vista del cappellino, la barca si è allontanata, quindi riavvicinata alla stessa velocità: non serve conoscere i valori delle velocità, basta sapere che la velocità della barca rispetto alla corrente – e rispetto al cappellino – è la stessa, solo in direzioni opposte. Recuperano il cappellino dopo 60 minuti dalla caduta in acqua.

12. **Risposta:** 2027
    Tratto dalla Gara a Squadre provinciale 2011
    Si utilizza la formula $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$. $r^3 - 9r + 2011 = 8 - \sqrt{37} + 8 + \sqrt{37} + 3(\sqrt[3]{64-37})r - 9r + 2011 = 16 + 9r9r + 2011 = 2027$.

13. **Risposta:** 0170
    Tratto dalla Gara a Squadre provinciale 2003
    Sia r il raggio di una sferetta di gomma. La sfera di cristallo viene trattenuta dalle sferette di gomma equidistante dai vertici del cubo formato dai centri delle sferette. La lunghezza in decimetri del lato di questo cubo è $10 - 2r$. La diagonale del cubo si calcola in due modi: $\sqrt{3} \cdot (10 - 2r) = 8 + 2r$. Si ricava $r = \frac{19 - 9\sqrt{3}}{2} \approx 1,705$. La risposta è 170.

14. **Risposta:** 0984
    Tratto dalla Gara a Squadre provinciale 2005
    Conviene calcolare lo spostamento della puntina dal punto di inizio ogni coppia di mosse, una orizzontale, una verticale: dato che la successione si sviluppa a partire dal dato iniziale sempre dimezzando un valore, scriviamo a al posto di $1m$ e k al posto di $\frac{1}{2}$:

$$\sqrt{a^2 + (ka)^2} = a\sqrt{1 + k^2}$$

$$\sqrt{(a - ka)^2 + (ka - k^3 a)^2} = (1 - k^2)a\sqrt{1 + k^2}$$

$$\sqrt{(a-ka+k^4a)^2+(ka-k^3a+k^5a)^2}=(1-k^2+k^4)a\sqrt{1+k^2}$$

$$\vdots$$

$$\sqrt{(a+\cdots+(-1)^nk^{2n}a)^2+(ka+\cdots+(-1)^nk^{2n+1}a)^2}=(1+\cdots+(-1)^nk^{2n})a\sqrt{1+k^2}$$

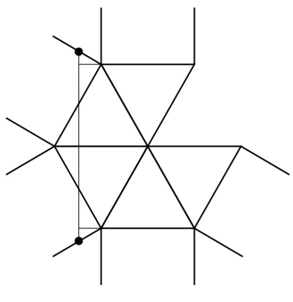
Lo spostamento dopo $2n$ mosse è:

$$1-(-1)^nk^{2(n+1)}\frac{a}{\sqrt{1+k^2}}$$

Nel caso considerato, $(1-(-1)^nk^{2(n+1)})\frac{200}{\sqrt{5}}$. Visto che $\frac{2000}{\sqrt{5}}=894,41$, basta trovare un numero n tale che$\frac{894,41}{2^{2(n+1)}}<4$, cioè $2472<2^{2(n+1)}$. Questo è ovvio, ad esempio, per $n=5$. La risposta è 894.

15. **Risposta:** 4500
Tratto dalla Gara a Squadre provinciale 2007
Sia l il lato del quadrato di base. Conviene spezzare il solido congiungendo i vertici del quadrato con il punto medio della base maggiore dei trapezi. In questo modo si ottengono due tetraedri regolari di lato l e una piramide regolare a base quadrata di lato l. Infatti le congiungenti tracciate sono lunghe esattamente l dato che ogni trapezio isoscele è metà di un esagono regolare. Quindi il volume totale pari a $\frac{\sqrt{2}}{6}l^3+2\frac{\sqrt{2}}{12}l^3=\frac{\sqrt{2}}{3}l^3=4500m^3$.

16. **Risposta:** 0357
Tratto dalla Gara a Squadre provinciale 2011
Siano $l=120m$ e $d=30m$ le misure del lato di base del pentagono (e di ogni lato degli spioventi del tetto) e la distanza sullo spigolo del punto dove posizionare una bomba dal vertice dello spigolo in comune con il tetto. Il percorso più breve richiede un trasferimento ad uno spigolo lontano $l\sqrt{3}$ in linea d'aria per posare la quarta bomba e un trasferimento di l per posizionare la quinta bomba. Il percorso più breve per compiere il secondo è orizzontale, mentre si deve valutare quale delle due possibilità scegliere per il primo trasferimento. Il percorso orizzontale (che attraversa due facce laterali) è $2l$. L'altro percorso è il più breve che attraversa il tetto. Questo problema si riduce ad uno di geometria piana appiattendo il tetto e le facce:



Il percorso più breve che passa sopra al tetto è lungo $(\frac{\sqrt{3}}{2}l+\frac{d}{2})=\sqrt{3}l+d$. È più breve di quello orizzontale esattamente quando $d<(2-\sqrt{3})l$. Nel caso in considerazione $30<(2\sqrt{3}\cdot 120$ e la distanza minima totale è $\sqrt{3}l+d+l\approx 357,8$. La risposta è 0357.