

# Prima gara Suole di Gauss

16 Aprile 2020

Prima di iniziare, ricordati di raggiungerci sul nostro canale Telegram per non perderti gli aggiornamenti sulla gara in corso:

[https://t.me/joinchat/AAAAAFdV9Z\\_QJyZ09F8Y6A](https://t.me/joinchat/AAAAAFdV9Z_QJyZ09F8Y6A)

1. Sia  $C$  una circonferenza di raggio  $r$ . Prendo due punti a caso su di essa e costruisco la corda che li unisce. Per ognuno dei due segmenti circolari prendo un punto casuale sul relativo arco; questo costituisce il vertice di un triangolo che ha per base la corda. Chiamo  $s$  il valore dell'area del triangolo più piccolo e  $t$  il valore dell'area del triangolo più grande. Al variare dei punti presi sugli archi, qual è il minimo valore che assume l'espressione  $\frac{4s^2+t^2}{5st}$ ?  
Consegnare il valore moltiplicato per 100.
2. Sia  $ABCD$  un quadrato. Prendo un punto  $E$  sul lato  $BC$  tale che  $BE = 36$ . Traccio la bisettrice dell'angolo  $\widehat{EAD}$  e chiamo  $F$  il punto in cui interseca il lato  $CD$ .  
Sapendo che  $FD$  misura 64, quanto misura il segmento  $AE$ ?
3. Ho un dado cubico (equo) con le facce numerate da 1 a 6 e un dado dodecaedrico con le facce bianche. Devo assegnare a ogni faccia un numero tra 0 e 12 (senza necessità di usarli tutti e, quindi, con la possibilità di ripeterli) in modo che lanciando i due dadi insieme abbia la stessa probabilità di ottenere ogni numero tra 1 e 18. Qual è il massimo numero di volte che sono costretto a ripetere un numero?
4. Kevin e Francesco stanno calcolando il 32° numero di Fibonacci a mano per passare il tempo. Ad un certo punto arriva Matteo a fare il guastafeste e dice loro che esiste un metodo molto più veloce; dopo pochi secondi gli spoilerà così il risultato.  
Non contento Matteo sfida i due: "scegliete un numero ciascuno e considerateli come i primi due numeri di una sequenza lunga 10 numeri. I successivi li calcolate col metodo Fibonacci, ovvero sommando i due precedenti. Ancora prima che li abbiate scritti tutti e 10, io vi dirò qual è la loro somma"  
Kevin e Francesco scelgono un numero ciascuno e iniziano a fare i calcoli.

Appena scrivono il 7° numero, ancora prima che riescano a calcolare l'8°, Matteo grida: "la somma farà...!"

Supponendo che abbia detto giusto e che il settimo numero era 724, che numero ha gridato?

5. Sia  $S(n)$  la somma delle cifre di un intero  $n$ . Se  $S(n) = 2018$ , qual è il minimo valore possibile per  $s(n + 1)$ ?
6. Siano  $x$  e  $y$  due numeri reali tali che  $x + y = 2$  e  $x^4 + y^4 = 1234$ . Calcolare  $|xy|$ .
7. Sia  $F(x)$  una funzione a valori reali definita per ogni  $x \neq 0$  e tale che

$$F(x) + F\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x$$

Trovare  $F(2)$  e dare come risposta le prime 4 cifre decimali del risultato.

8. Calcolate la somma dei valori assoluti delle soluzioni intere  $(x, y)$  dell'equazione:  
 $2x^2 + 5y^2 + 88 = 11xy$ .
9. Sapendo che  $x^{2019} - x - 2019 = 0$  e che  $x$  non è negativo, determinare le ultime quattro cifre prima della virgola di  $x^{4038} - 4038x$ .
10. Quattro punti  $O, A, B$  e  $C$  soddisfano le seguenti condizioni:  $OA = OB = OC = 1$ ,  $\hat{AOB} = 60^\circ$  e  $\hat{BOC} = 90^\circ$ .  $B$  è tra  $A$  e  $C$  ( $\hat{AOC}$  è ottuso). Disegnare tre cerchi  $O_a, O_b$  e  $O_c$  con diametri  $OA, OB$  e  $OC$  rispettivamente. Trovare l'area della regione dentro  $O_b$  ma fuori da  $O_a$  e  $O_c$ . Dare come risposta il risultato moltiplicato per 10000.
11. Sia  $ABCD$  una piramide a base triangolare tale che il piede dell'altezza condotta da  $A$  alla faccia  $BCD$ , che è acutangola, cade nel suo ortocentro  $H$ . Siano  $K$  ed  $L$  i piedi delle perpendicolari condotte da  $A$  rispettivamente a  $BD$  e  $CD$ . Si sa che  $\hat{KAC} = 90^\circ$ ,  $BH = 207$  e  $AL = 460$ . Trovare la lunghezza di  $AH$ .
12. Sherlock e Watson corrono a casa di Irene per recuperare le foto. La pianta della città è una griglia rettangolare di dimensioni 4 e 3. I due partono da un punto qualsiasi del bordo sinistro e devono andare a uno qualsiasi del bordo destro, muovendosi solo sui segmenti della griglia verso l'alto, verso destra o verso il basso ma senza mai ripassare su segmenti già attraversati. Quanti sono i percorsi che possono seguire in tutto?