

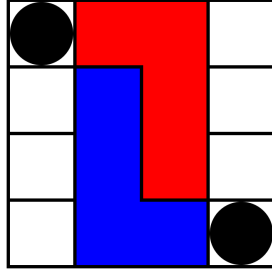
Seconda gara Suole di Gauss

23 Marzo 2020

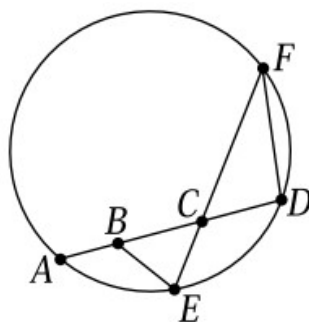
Prima di iniziare, ricordati di raggiungerci sul nostro canale Telegram per non perderti gli aggiornamenti sulla gara in corso:

https://t.me/joinchat/AAAAAFdV9Z_QJyZ09F8Y6A

1. Il famoso professore italo-olandese Lapo Van Nucchio, è solito proporre sfide matematiche ai suoi alunni basate sulla realtà. L'ultima volta il tema erano le olimpiadi e l'astuto studente Nanni Dei Grania è riuscito a rispondere anche senza saper calcolare matematicamente la risposta. Allora il prof questa volta ha voluto esagerare, così da mettere in difficoltà l'astuzia di Nanni. La sfida è la seguente: data una scacchiera 54×54 , quanti rettangoli possiamo costruire aventi i vertici sui vertici della scacchiera?
Dare come risposta le ultime 4 cifre.
2. Quanti sono gli interi positivi che dividono 10^{40} o 20^{30} ?
3. Il gioco L (conosciuto come L game) è uno dei più difficili tra i giochi... facili. Le regole sono semplici: dalla posizione iniziale mostrata in figura, un giocatore deve (obbligatoriamente) muovere il suo pezzo L in una posizione libera (può anche essere girato in tutte e 3 le direzioni), dopodiché può (non necessariamente) muovere uno dei due gettoni neutrali in una casella libera. Tutto qua. Il giocatore che non ha più mosse ha perso. Sì, è semplicissimo, basti pensare che ci sono solo 2296 modi per posizionare i pezzi (senza considerare situazioni rotate o specchiate).
Tuttavia può non finire mai, la difficoltà infatti sta, ovviamente, nell'indurre l'altro giocatore all'errore.
In quanti modi (univoci a meno di situazioni rotate o specchiate) i due pezzi L possono stare sulla griglia?



4. Calcolare $\frac{17}{75 \cdot 76} + \frac{17 \cdot 18}{75 \cdot 76 \cdot 77} + \frac{17 \cdot 18 \cdot 19}{75 \cdot 76 \cdot 77 \cdot 78} + \dots$
 Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.
5. I minion ricordano ancora il loro primo umano cattivo con cui vissero durante l'Età della Pietra fino al giorno in cui un orso Grizzly non lo divorò. Si trattava di un Uomo di Neanderthal. Nonostante avesse un cervello molto ridotto rispetto a quello medio dell'homo sapiens moderno egli riusciva a determinare il più grande divisore con non più di quattro cifre del numero 1001001001. E tu Homo Sapiens riesci a trovarlo?
6. Un grande parco circonda il villaggio olimpico. Due lati del parco sono delimitati da 2 strade rettilinee che formano tra di loro un angolo di 56° . Nel parco c'è poi un laghetto circolare, tangente alle due strade. Una terza strada, tangente anch'essa al lago, incontra le 2 strade precedenti in due incroci, in cui in questo momento si trovano Andrea e Luca. Le 3 strade descritte delimitano un triangolo che non contiene il laghetto. Determinare il massimo ed il minimo valore possibile per l'ampiezza in gradi dell'angolo con vertice nel centro del lago ed i cui lati passano, rispettivamente, per Andrea e Luca.
 Trascurare lo spessore delle strade e degli incroci. Nella risposta utilizzare le 2 cifre a sinistra per indicare il massimo e le restanti 2 per indicare il minimo.
7. Il cerchio O ha tre corde, AD , DF e EF . Il punto E giace sull'arco AD ; il punto C è l'intersezione delle corde AD ed EF ; il punto B giace sul segmento AC in modo tale che $EB = EC = 8$. Dati $AB = 6$, $BC = 10$ e $CD = 10$, trovare la misura di DF (consegnare la parte intera del risultato moltiplicato per 100).



8. La base di un prisma a base esagonale ha lato lungo s ed il prisma ha altezza h . Il prisma contiene dell'acqua che, quando il prisma è poggiato su una base esagonale, ha altezza $\frac{s\sqrt{3}}{4}$. L'altezza dell'acqua non cambia quando il prisma è "sdraiato" (ovvero poggiante su una faccia rettangolare). Calcolare il rapporto $\frac{h}{s}$ (consegnare la parte intera del risultato moltiplicato per 100).
9. Nel giorno di San Valentino si è soliti fare una lotteria d'azzardo. Ogni concorrente lancia due dadi equi: uno a 12 facce, numerate da 0 a 11, e l'altro a 4 facce, numerate da 0 a 3. Il concorrente vince se la somma dei due numeri ottenuti è un multiplo di 7. Su 5 giocate, qual è la probabilità che un giocatore vinca almeno due volte? Inserire nel risultato la somma del numeratore e del denominatore della frazione ottenuta, dopo averla ridotta ai minimi termini.
10. Alcuni studenti di matematica di Parma hanno realizzato un videogioco in cui è stato simulato un biliardo a forma di triangolo isoscele il cui angolo al vertice ha ampiezza di soltanto due primi (un trentesimo di grado!). Una pallina viene lanciata da un estremo della base. Determinare il massimo numero di rimbalzi che la pallina può fare contro le sponde laterali prima di sbattere nuovamente sulla base. Trattandosi di una versione preliminare, la pallina è stata approssimata con un punto.
11. Una rana sta saltando sulle linee dei numeri, partendo da 0 e arrivando a 7. Può saltare da x a $x + 1$ o $x + 2$. La rana però è visibilmente confusa e prima di arrivare al 7 salta indietro di uno (succede una volta sola e in modo da non arrivare a un numero negativo). Quanti modi ha per arrivare al 7?
12. Determinare il numero di soluzioni intere dell'equazione $n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = k^2$.

Domanda extra: Sia $ABCD$ un rettangolo. Dividiamo i lati come mostrato in figura. Sapendo che l'area colorata misura 9, quanto misura l'area del rettangolo $ABCD$?

Questa non è una domanda della gara per cui non dovete consegnare la risposta. La soluzione verrà pubblicata insieme alle altre.

