

Terza gara Suole di Gauss

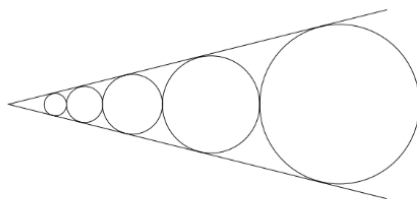
31 Marzo 2020

Prima di iniziare, ricordati di raggiungerci sul nostro canale Telegram per non perderti gli aggiornamenti sulla gara in corso:

https://t.me/joinchat/AAAAAFdV9Z_QJyZ09F8Y6A

1. Siano x, y, z numeri reali con $x \geq y \geq z \geq \frac{\pi}{12}$ tali che $x + y + z = \frac{\pi}{2}$. Trovare il minimo valore del prodotto $\cos x \cdot \sin y \cdot \cos z$. Dare come risposta il risultato moltiplicato per 1000.
2. La NASA ha lanciato due satelliti, che ora ruotano intorno alla Terra seguendo nello stesso verso due orbite circolari complanari di raggio differente. Il primo impiega 3 ore e 50 minuti per compiere una rivoluzione completa, mentre il secondo impiega 4 ore e 15 minuti. Al centro spaziale di Houston osservano che, allo scoccare della mezzanotte, i due satelliti si sono trovati alla minima distanza possibile l'uno dall'altro. Determinare a che ore si troveranno, per la prima volta, alla massima distanza possibile. Nella risposta si utilizzino le due cifre a sinistra per indicare le ore, nel formato da 00 a 24, e le rimanenti per indicare i minuti.
3. Un postino consegna la posta alle 19 case sul lato est di Via dell'Olmo. Il postino nota che due case vicine non ricevono mai la posta lo stesso giorno, ma non ci sono mai più di due case di fila che non ricevono posta lo stesso giorno. Quante sono le diverse situazioni che si possono verificare?
4. Tre scatole contengono, rispettivamente, 2 palline bianche, 1 pallina bianca e 1 nera, 2 palline nere. Mario, che è bendato, sceglie a caso una delle scatole e da lì estrae una pallina. A questo punto, si toglie la benda, scopre che la pallina è bianca, e la rimette dentro. Qual è a questo punto la probabilità che, con un nuovo sorteggio dalla stessa scatola, Mario estragga ancora una pallina bianca? Dare come risposta il risultato moltiplicato per 10000
5. Detto $p(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})(1+x^{64})(1+x^{128})(1+x^{256})(1+x^{512})$ qual è la somma delle cifre in base 3 di $p(3)$?
6. Cinque biglie sferiche di dimensioni differenti sono incastrate tra loro e tra le pareti interne di un cono circolare retto come in figura. Sapendo che la

più piccola ha raggio di 8 mm e la più grande ha raggio di 18 mm, qual è il raggio della terza, in millimetri?



7. Consideriamo il seguente gioco: tiro un dado a 20 facce, numerate da 2 a 21, leggo il risultato e ti dico, in modo del tutto casuale, un divisore di quel numero diverso da 1. Vinci se riesci ad indovinare il numero uscito senza guardare il dado. Supponendo di usare la migliore strategia possibile per vincere, qual è la probabilità che ciò accada? Dare la risposta come somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.
8. Quanto vale il prodotto dei numeri interi positivi n tali che $\frac{n^3-12}{n+2}$ è un numero naturale?
9. Quante sono le funzioni $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tali che $f(x^2 + y) = x^2 + f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{N}$ e che soddisfano $f(100) \leq 1000$?
10. Siano α, β, γ le soluzioni dell'equazione $x^3 - 7x^2 + 11x - 3 = 0$. Quanto vale $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$?
11. Wash, per passare il tempo viaggiando nello spazio profondo, disegna una circonferenza di raggio 12 cm e disegna 4 punti A, B, C, D sulla circonferenza nel modo seguente. Fissato A , segna B in modo che AB sia lungo 9 cm; poi segna D dalla parte opposta a B rispetto ad A in modo che AD sia lungo quanto il raggio della circonferenza. A questo punto traccia l'altezza del triangolo ABD dal vertice A e indica con C il punto di intersezione dell'altezza con la circonferenza diverso da A . Qual è il rapporto tra la diagonale più corta e la diagonale più lunga del quadrilatero $ABCD$? Dare come risposta le prime quattro cifre dopo la virgola.
12. Sapendo che p, c, v sono numeri primi tali che $vc + p^2 = 676$, calcolare la somma di tutti i possibili prodotti pcv .