Prima gara Suole di Gauss

16 Marzo 2020

Ricordati di raggiungerci sul nostro canale Telegram per non perderti gli aggiornamenti sulle prossime gare:

`https://t.me/joinchat/AAAAAFdV9Z_QJyZO9F8Y6A`

1. Risposta: 0080
   Problema tratto dal canale youtube MindYourDecisions.
   L'unica informazione che ci può dare la parte geometrica del problema è che $0 \leq s \leq t$. Non ci sono legami geometrici tra s e t. Dobbiamo quindi trovare il valore minimo che può assumere l'espressione $\frac{4s^2+t^2}{5st}$, che semplificata diventa $\frac{4}{5}\frac{s}{t} + \frac{1}{5}\frac{t}{s}$. Possiamo farlo ad esempio usando l'analisi elementare, sostituendo u a $\frac{s}{t}$ e individuando un minimo in $\frac{1}{2}$. Il valore minimo è $\frac{4}{5}$, moltiplicato per 100: 80.

2. Risposta: 0100
   Problema tratto dal canale youtube MindYourDecisions.
   La soluzione di questo problema non è difficile, si rimanda al video originale per una spiegazione più soddisfacente e ben fatta, di quanto possiamo descrivere senza animazioni. `https://www.youtube.com/watch?v=jsajsxV4icI&t=326s`

3. Risposta: 0004
   Problema ispirato ad una domanda posta ad un colloquio di lavoro presso Amazon.
   Un dado ha 6 facce, mentre l'altro 12; le possibili combinazioni sono quindi $6 \cdot 12 = 72$. Considerando che i possibili risultati sono 18 e che ognuno di questi deve avere la stessa probabilità di uscire, ogni numero da 1 a 18 deve avere $\frac{72}{18} = 4$ modi di uscire.
   L'1 può uscire solo se nel dado cubico esce 1 e nel dado dodecaedrico esce 0, quindi devono esserci 4 zeri. Il 18 può uscire solo se escono 6 e 12, quindi fissato il 6 sul dado cubico, devono esserci quattro 12 sul dado dodecaedrico.
   Pure non andando avanti nell'assegnazione, vediamo che rimangono solo 4 facce da assegnare, quindi (anche supponendo che venga ripetuto lo stesso numero anche lì) il massimo è 4.

4. Risposta: 7964
Problema inventato.
Non serve sapere quali siano i due numeri iniziali, se vi interessa vi possiamo dire che ci sono 3 possibili combinazioni, ma non è utile nemmeno questo.
Detti m, n i numeri iniziali, il terzo numero sarà $m+n$, il quarto $m+2n$, ..., il settimo $5m+8n$, e così via. Lascio a voi i conti. Sommandoli tutti, otteniamo $55m+88n$, che è esattamente 11 volte il settimo numero della sequenza. A Matteo è bastato fare $724 \cdot 11 = 7964$.

5. Risposta: 0003
Problema tratto dallo Stanford Math Tournament 2018
Per minimizzare $S(n+1)$, quando aggiungiamo 1 a n dobbiamo cambiare quante più cifre 9 in 0. Dal momento che $2018 = 224 \cdot 9 + 2$, possiamo supporre che n inizi con la cifra 2 e prosegua con 224 cifre 9. Aggiungendo 1 abbiamo la cifra 3 seguita da 224 cifre 0.

6. Risposta: 0021
Problema tratto dallo Stanford Math Tournament 2019

$$x^4 + y^4 = (x+y)^4 - 4xy(x+y) + 2xy$$

Sostituendo $x+y=4$ arriviamo a un'equazione di secondo grado in xy, le cui soluzioni sono 29 e -21.
Se $xy = 29$, x e y sarebbero le radici dell'equazione $z^2 - 2z + 29$, che però non sono reali, quindi necessariamente $xy = -21$

7. Risposta: 7500
Problema tratto dallo Stanford Math Tournament 2011
Poniamo $x = 2$, troviamo che $F(2) + F(\frac{1}{2}) = 3$. Poniamo $x = \frac{1}{2}$, troviamo che $F(\frac{1}{2}) + F(-1) = \frac{3}{2}$. Infine poniamo $x = -1$ e troviamo $F(-1) + F(2) = 0$. Quindi:

$$F(2) = 3 - F\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3 - \left(\tfrac{3}{2} - F(-1)\right) = \tfrac{3}{2} + F(-1) = \tfrac{3}{2} - F(2)$$

Quindi $f(2) = \frac{3}{4}$

8. Risposta: 0170
Problema tratto dalla gara Belmanto 2017.
L'equazione è scrivibile come $2x^2 - 11xy + 5y^2 + 88 = 0$, $x = \frac{11y \pm \sqrt{121y^2 - 40y^2 - 704}}{4}$.
Deve essere $81y^2 - 704 = n^2$, con n naturale; cioè $(9y+n)(9y-n) = 704 = 2^6 \cdot 11$. Il sistema $9y+n = a$, $9y+n = b$ ha soluzione $(y, n) = ((a+b)/18, (a-b)/2)$; a e b devono essere multipli di 2. Quindi le possibili coppie (a, b) sono: $(32, 22), (16, 44), (8, 88), (4, 176), (2, 354)$.
Si nota che:
- le coppie $(a, b) = (16, 44), (8, 88), (2, 354)$ sono escluse perché le rispettive somme $a + b = 60, 96, 354$ non sono multipli di 9;

- la coppia $(a, b) = (32, 22)$ implica $(y, n) = (3, 5)$, $x = 7$, $x + y = 10$;
- la coppia $(a, b) = (4, 176)$ implica $(y, n) = (10, 86)$, $x = 49$, $x + y = 59$ oppure $x = 6$, $x + y = 16$.

La somma richiesta è $(10 + 59 + 16) \cdot 2 = 170$, perché per ogni soluzione (x, y) c'è anche l'opposta $(-x, -y)$

9. Risposta: 6362
   Problema tratto dalla gara Belmanto 2019.
   Riscriviamo l'equazione data come $(x^{2019})^2 = (x + 2019)^2$, da cui $x^{4038} - 4038x = x^2 + 2019^2$ e osserviamo che $x^2019 - x - 2019$ è negativo per $x = 1$, positivo per $x = 2$. Quindi x si può scrivere come $1 + c$, con c che si verifica non portare contributo alle cifre richieste.
   La risposta è quindi $2019^2 + 1 = (2000 + 19)^2 + 1 = 6000 + 19^2 + 1$ modulo 10000, quindi la risposta è 6362.

10. Risposta: 3415
    Problema tratto dallo Stanford Math Tournament 2012.
    Siano D, E ed F i punti medi di BC, CA e AB, rispettivamente. Osserviamo che O_a passa per E ed F, O_b passa per D ed F e O_c passa per D ed E; i raggi verso questi punti sono tutti mediane di qualche triangolo $(AOB, AOC\ o\ BOC)$ e sono paralleli ai lati di lunghezza 1. Quindi, la regione $O_b \setminus (O_a \cup O_c)$ ha quattro vertici D, E, F e B: lungo DE ed EF il bordo è concavo con la forma di un arco di raggio 1, mentre lungo FB e DB è convesso.
    Notiamo che $DEFB$ è un parallelogramma, quindi $DE = BF$. Questo implica che l'arco DE di O_c e l'arco BF di O_b sono congruenti, quindi la regione convessa esterna al segmento FB può essere messa nella regione concava interna al segmento DE. E uguale per EF e DB. Così l'area di $O_b \setminus (O_a \cup O_c)$ è esattamente l'area del parallelogramma $DEFB$. Quindi la risposta è $|ABC|/2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}sen150°\right) = (1 + \sqrt{3})/8$

11. Risposta: 0276
    Gara di Tor Vergata 2018.
    Si dimostra facilmente che la proiezione dell'ortocentro H sul lato BD coincide con K. Quindi in particolare CK è un'altezza del triangolo BCD. Allo stesso modo possiamo concludere che BL è un'altezza di BCD. Dal fatto che AKC è retto, segue che anche ABL lo è. Vediamo perché: per il secondo teorema di Euclide, sappiamo che $AH^2 = KH \cdot HC$. Inoltre, i due triangoli KHB e LHC sono simili e dunque, scrivendo i rapporti tra i lati corrispondenti, troviamo che $KH \cdot HC = LH \cdot HB$, da cui $AH^2 = LH \cdot HB$. Quindi anche il triangolo ABL è rettangolo in A (inverso del secondo teorema di Euclide). Di questo triangolo rettangolo conosciamo AL e BH e quindi possiamo determinare gli altri lati usando i teoremi di Euclide e Pitagora: posto $AH = x$ e $HL = y$ possiamo scrivere

il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 460^2 \\ x^2 = y \cdot 207 \end{cases}$$

Si trova quindi un'equazione di secondo grado in y che risolta dà come soluzione accettabile $y = 368$. Infine, sostituendo, si trova che $x = 276$. Per maggiori dettagli `https://www.youtube.com/watch?v=bQunUJqeTBc`

12. Risposta: 3125
    Problema tratto da OliMaTo 2016.
    Diciamo p_n il numero dei percorsi in un rettangolo di lati 4 e n. Il valore cercato è p_3 e $p_0 = 25$ perché da ogni punto del segmento posso arrivare a tutti gli altri esattamente in un modo. Consideriamo p_{n+1}. Osserviamo che per arrivare a un generico punto del lato di destra devo passare da un punto della verticale precedente. Consideriamo l'ultimo punto toccato sulla penultima riga verticale. Da ognuno di questi punti posso arrivare al punto finale in esattamente 1 modo perché devo andare per forza a destra come prima mossa e poi mi sposto in verticale in un modo. Inoltre questo posso farlo da ogni punto della verticale precedente. Dunque ogni punto del lato di arrivo può essere raggiunto in $1 \cdot p_n = p_n$ modi. Questo per ognuno dei 5 punti del lato d'arrivo, da cui $p_{n+1} = 5p_n$, quindi $p_n = 5^{n+2}$. $p_3 = 5^5 = 3125$.