Seconda gara Suole di Gauss

23 Marzo 2020

Ricordati di raggiungerci sul nostro canale Telegram per non perderti gli aggiornamenti sulle prossime gare:

`https://t.me/joinchat/AAAAAFdV9Z_QJyZO9F8Y6A`

1. Risposta: 5225
   Problema ispirato ad un video del canale youtube Blackpenredpen.
   Si può risolvere in molti modi. Si possono trovare delle regolarità partendo da scacchiere più piccole e aumentando, ma arrivare a 54 non è affare da poco.
   Uno dei metodi più brillanti è contare in quanti modi possiamo scegliere dove mettere i lati del rettangolo. Abbiamo 55 righe e 55 colonne (parliamo delle linee che dividono le celle della scacchiera); scegliamo in quali righe posizionare i lati orizzontali del rettangolo (senza scegliere le misure). Chiarametne questo è 55 binomiale 2. così facendo abbiamo anche scelto indirettamente la misura dei lati verticali.
   Scegliendo su quali colonne mettere i lati verticali del rettangolo sceglieremo la misura dei lati orizzontali. E anche questo può essere fatto in 55 binomiale 2 modi.
   I modi quindi sono $\binom{55}{2}^2 = 1485^2 = 2205225$

2. Risposta: 2301
   Problema tratto dal canale youtube blackpenredpen.
   Calcoliamo i divisori del primo: $10^{40} = 2^{40} \cdot 5^{40}$. I possibili divisori sono 41^2 (ovvero 41 modi per prendere/non prendere il fattore 2 e 41 per il fattore 5).
   La stessa cosa si può fare per $20^{30} = 2^{60} \cdot 5^{30}$: $61 \cdot 31$ modi.
   Adesso sommiamo e poi dobbiamo sottrarre i divisori di entrambi, che abbiamo contato due volte. Questi saranno $41 \cdot 31$ (ovvero il 2 lo possiamo prendere fino a 40 volte, dopodiché il risultato non sarà più divisore di 10^{40}, e il 5 lo possiamo prendere fino a 30 volte).
   Il risultato è 2301.

3. Risposta: 0082
   Problema inventato

Sapendo che le posizioni totali sono 2296 è tutto semplice: per ogni posizione dei due pezzi L, i pezzi neutrali possono essere messi in $\binom{8}{2} = 28$ modi diversi. $2296/28 = 82$

4. Risposta: 4367
   Tratto da Pui Ching Math Competition.
   Una soluzione elegante, certamente non la sola, è quella proposta dal canale youtube Blackpenredpen, di cui vi lascio il link: `https://www.youtube.com/watch?v=6iEL6hqNEgk`

5. Risposta: 9901
   Problema tratto dal II Trofeo Copernico.
   $1001001001 = 1001 \cdot 106 + 1001 = 1001 \cdot (106 + 1) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot (106 + 1)$
   Poiché $x^6 + 1 = (x^2)^3 + 1 = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$, allora $106 + 1 = 101 \cdot 9901$. Per cui il numero si fattorizza: $1001001001 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 101 \cdot 9901$. Combinando i primi quattro fattori si ottengono numeri minori dell'ultimo, pertanto il divisore più grande minore di 10000 deve essere proprio l'ultimo fattore.

6. Risposta: 6262
   Problema tratto dalla gara locale del 2006.
   Siano P il punto di incontro delle 2 strade, O il centro della circonferenza del laghetto, H e K i punti di tangenza tra una strada e il laghetto, A e L i punti dove si trovano Andrea e Luca, su OH e OK rispettivamente. Le rette OA e OL sono le bisettrici degli angoli $H\hat{O}P$ e $K\hat{O}P$, rispettivamente. Perciò l'angolo $A\hat{O}L$ è metà dell'angolo $H\hat{O}K$.
   Dunque, qualunque sia la posizione della strada AL, l'angolo $A\hat{O}L$ ha sempre la stessa ampiezza; così i suoi valori massimo e minimo coincidono. L'angolo $H\hat{O}K$ è supplementare all'angolo $H\hat{P}K$, così $A\hat{O}L = \frac{180° - 56°}{2} = 62°$.

7. Risposta: 1581
   Problema tratto dallo Stanford Math Tournament 2014.
   $AC \cdot CD = EC \cdot CF$, quindi so che $CF = 16 \cdot \frac{10}{8} = 20$. Usando il teorema dei coseni, troviamo la misura dell'angolo $E\hat{C}B$, che è congruente a $D\hat{C}F$: $8^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot cos\theta$. Quindi $cos\theta = \frac{5}{8}$ e $DF^2 = 10^2 + 20^2 - 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot cos\theta = 250$. Quindi la risposta è $5\sqrt{10} = 15,81$.
   NOTA: Con le misure riportate nel testo poteva essere risolto anche per similitudine dei triangoli, via non percorribile con le misure originarie del problema.

8. Risposta: 0207
   Problema tratto dallo Stanford Math Tournament 2019.
   Quando il prisma poggia sulla faccia esagonale il volume dell'acqua è banalmente l'area di base per l'altezza, quindi $\frac{9s^3}{8}$. Quando è sdraito il volume è pari all'area di un trapezio isoscele (con lati alla base di 120°) con una base lunga s e altezza $\frac{s\sqrt{3}}{4}$, moltiplicato per h.

Otteniamo l'equazione $\frac{5}{16}s^2h\sqrt{3} = \frac{9}{8}s^3$, da cui è possibile ricavare $\frac{h}{s} = \frac{6}{5}\sqrt{3}$

9. Risposta: 9181
   Problema tratto dalla Disfida matematica 2016.
   La probabilità di uscita di un multiplo di 14 è $\frac{1}{8}$, per cui la probabilità richiesta è:

$$\binom{5}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^3+\binom{5}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^3\left(\frac{7}{8}\right)^2+\binom{5}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^4\left(\frac{7}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}\right)^5=\frac{989}{8192}$$

10. Risposta: 5400
    Problema tratto dalla gara locale del 2002.
    Si consideri che un rimbalzo può essere rimpiazzato disegnando un biliardo virtuale simmetricamente al lato di rimbalzo e facendo proseguire la traiettoria nel biliardo virtuale. Supponendo che la pallina continui a rimbalzare sulle sponde laterali, si disegnano tanti triangoli isosceli con il vertice dell'angolo di un trentesimo di grado in comune. Il modo per tracciare una traiettoria che parte da un vertice di base e attraversa il massimo numero di triangoli prima di attraversare la base e quella di completare un semicerchio: $\frac{180}{\frac{1}{30}} = 5400$
    NOTA: Su internet si trovano due pdf di soluzioni relativi a questa gara. In uno **correttamente** si toglie uno al risultato (quindi 5399) perché effettivamente i rimbalzi sono quante volte il punto cambia triangolo nella traiettoria, ovvero ci sono 5399 cambi di triangolo. Trattandosi di un errore venuto fuori quando già in tante persone avevano consegnato la risposta giusta (5400), abbiamo deciso di accettarli entrambi.

11. Risposta: 0146
    Problema tratto dallo Stanford Math Tournament 2011.
    Sia f_n il numero di modi in cui può raggiungere n da 0 (ignorando il salto indietro). Abbiamo $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ quando $n \geq 2$. Quindi abbiamo la sequenza di Fibonacci.
    Il saltare fino a 7 lo possiamo rappresentare come saltare in avanti di n, saltare indietro di 1 e nuovamente in avanti di $8 - n$. Quindi i modi totali sono:

$$\sum_{i=1}^{6} f_i f_{8-i} = 146$$

12. Risposta: 0003
    Problema tratto dagli allenamenti EGMO 2016.
    Notiamo innanzitutto che possiamo supporre $k \geq 0$; se poi otterremo una soluzione (n, k) con $k \geq 0$, avremo anche la soluzione $(n, -k)$.
    Consideriamo ora il caso in cui $n < 0$. Se $n < -1$, vediamo facilmente che $n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 < 0$; quindi dobbiamo necessariamente avere $n = -1$, da cui otteniamo la soluzione $(-1, 0)$.

Ci siamo quindi ridotti al caso in cui $n, k \geq 0$. Notiamo innanzitutto che vale la fattorizzazione $n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = (n^2 + n + 1)(n^3 + 1)$ (Si ricava riscrivendolo come $\frac{n^6-1}{n-1}$).
Mostriamo ora che i due fattori $n^2 + n + 1$ e $n^3 + 1$) sono coprimi. Supponiamo per assurdo che esista un primo p che li divide entrambi, allora in particolare $p|n^3 + 1$ e $p|n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$. Di conseguenza $p|(n^3 + 1) - (n^3 - 1) = 2$, quindi $p = 2$; anche questo caso però è assurdo perché n^+1 e n^2+n+1 hanno parità diversa e quindi abbiamo dimostrato la coprimalità.
Per avere $(n^2 + n + 1)(n^3 + 1) = k^2$, deve perciò valere che entrambi i fattori della parte sinistra siano quadrati (visto che sono coprimi). In particolare dobbiamo avere che $n^2 + n + 1 = a^2$, con a intero. Se $n = 0$, otteniamo la soluzione $(0, 1)$ (e quindi $(0, -1)$); altrimenti sappiamo che $n^2 < n^2 + n + 1 < (n + 1)^2$ e di conseguenza $n^2 + n + 1$ non può essere anch'esso un quadrato, poiché compreso fra due quadrati successivi.
Abbiamo perciò ottenuto che le uniche soluzioni (n, k) sono $(-1, 0)$, $(0, 1)$ e $(0, -1)$.

Domanda extra: La risposta sarebbe 0000, in quanto impossibile. Possiamo trovare la y sfruttando la conoscenza dell'area colorata: l'unico valore accettabile è 9. A questo punto tramite le misure dei lati lunghi possiamo trovare la x, ovvero 12, ma i lati corti avrebbero misure incompatibili. Quello a sinistra misura 8, mentre una porzione di quello di destra misura... 9.