Terza gara Suole di Gauss

30 Marzo 2020

Ricordati di raggiungerci sul nostro canale Telegram per non perderti gli aggiornamenti sulle prossime gare:

`https://t.me/joinchat/AAAAAFdV9Z_QJyZO9F8Y6A`

1. Risposta: 0125
   Tratto dal libro "103 trigonometry problems for the training of the USA IMO team"
   Sia $p = \cos x \cdot \sin y \cdot \cos z$. Poiché $\frac{\pi}{2} \geq y \geq z$, $\sin(y - z) \geq 0$. Dalle formule di Werner abbiamo che
   $$p = \frac{1}{2} \cos x[\sin(y + z) + \sin(y - z)] \geq \frac{1}{2} \cos x \sin(y + z) = \frac{1}{2} \cos^2 x$$
   Notiamo che $x = \frac{\pi}{2} - (y + z) \leq \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$. Quindi il minimo valore di p è $\frac{1}{2} \cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{8}$, che si ottiene quando $x = \frac{\pi}{3}$ e $y = z = \frac{\pi}{12}$

2. Risposta: 1933
   Tratto dal trofeo Rabuzzi del 2015
   Ad ogni giro del primo satellite, il secondo resta indietro di 25 minuti. Ci vorranno quindi 255 min / 25 min = 10,2 giri affinché i due satelliti siano di nuovo alla minima distanza. Questo vuol dire che la massima distanza si avrà dopo 5,1 giri del primo satellite, cioè dopo 230 min · 5,1 giri = 1173 min, corrispondenti a 19 ore e 33 minuti. La risposta è quindi 1933.

3. Risposta: 0351
   Tratto dal libro "102 combinatorial problems from the training of the USA IMO team"

   La prima condizione implica che al massimo 10 case ricevono la posta in un giorno, mentre la seconda implica che almeno 6 case la ricevono. Se 6 case ricevono la posta, allora devono essere separate l'una dall'altra da un totale di almeno 5 case che non ricevono la posta. Le altre 8 case che non ricevono la posta devono essere disposte nei 7 spazi ai lati delle 6 case che ricevono la posta. Questo si può fare in 7 modi: o ne mettiamo due a ogni estremo della strada e distribuiamo le altre 4 in $\binom{5}{4} = 5$ modi, oppure ne mettiamo una in ciascuno dei 7 spazi e una in più a uno dei due estremi della strada. Se 7 case ricevono la posta, allora creano 8 spazi, 6 dei quali devono contenere almeno una casa che non rivece la posta. Le restanti 6 case che non ricevono la posta possono essere disposte in questi 8 spazi in 113 modi: possiamo scegliere 6 spazi dagli 8 in ciascuno dei quali mettere una casa in $\binom{8}{6} = 28$ modi; possiamo mettere due case a ciascun estremo della strada e scegliere altri due spazi in $\binom{6}{2} = 15$ modi; infine, possiamo mettere due case a un estremo della strada e si scegliere 4 spazi dai 7 in cui mettere una casa ciascuno in $2\binom{7}{4}$ modi. Un ragionamento simile mostra che ci sono $\binom{9}{4} + 1 + 2\binom{8}{2} = 183$ possibilità se 8 case ricevono la posta, mentre $2 + \binom{10}{2} = 47$ se 9 case ricevono la posta. Se 10 case ricevono la posta, c'è una sola possibilità. Quindi il numero richiesto è 7+113+183+47+1=351.

4. Risposta: 8333
   Gara di Roma 2004
   Dopo che Mario ha estratto una pallina bianca, sappiamo che l'effettiva composizione della scatola è [BB] oppure [BN]. I due eventi, tuttavia, non sono più equiprobabili. Infatti, avevamo in tutto 6 palline, di cui 3 bianche, ciascuna con la stessa probabilità di essere sorteggiata. La prima pallina estratta o è una delle 2 palline bianche contenute nella scatola [BB], oppure è la pallina bianca della scatola [BN]. Quindi, tale pallina bianca proviene con probabilità $\frac{2}{3}$ dalla [BB] e con probabilità $\frac{1}{3}$ dalla [BN]. Ossia, dopo l'estrazione della prima pallina bianca, le probabilità di avere inizialmente scelto le scatole [BB] e [BN] sono, nell'ordine, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$. Qualora la scatola sia composta nel modo [BB], sicuramente la seconda pallina estratta sarà ancora bianca, mentre, se la scatola è la [BN], la probabilità che alla seconda estrazione si trovi la pallina bianca è $\frac{1}{2}$. In definitiva, la probabilità richiesta è pertanto:

$$\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

5. Risposta: 1024
   Belmanto 2019
   Moltiplicando e dividendo $p(x)$ per $1 - x$, possiamo riscriverlo come

$$\frac{1 - x^{1024}}{1 - x} = \sum_{i=0}^{1023} x^i$$

   Quindi $p(3) = \sum_{i=0}^{1023} 3^i$ e ciascuno porta un contributo 1 alla scrittura in base 3 (senza cancellazioni), quindi la risposta è 1024.

6. Risposta: 0012
   Gara di Roma 2017
   Consideriamo due biglie successive di raggi $r < R$ e centri a distanza $d < D$ dal vertice O del cono. Se α è l'angolo di apertura del cono, si ha

che $R = D \sin\alpha$ e $D = d + r + R$, dunque

$$R = (d + r + R\sin\alpha \Longrightarrow R = (d+r)\frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\frac{d+r}{r} = \frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}(1+\frac{d}{r}) = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$$

Questo mostra che il rapporto dei raggi di due biglie successive è una costante $c = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$ dipendente solo dall'angolo di apertura e non dai raggi. Allora, detti r_1,r_2,r_3,r_4,r_5 i raggi delle cinque biglie, si deduce che

$$\frac{r_5}{r_3} = \frac{r_5}{r_4}\frac{r_4}{r_3} = c^2 = \frac{r_3}{r_1}$$

da cui $r_3 = \sqrt{r_1 r_5} = \sqrt{18 \cdot 8} = 12$.

7. Risposta: 637
   Gara locale 2017
   Sia d_n il numero di divisori diversi da 1 del numero naturale n. Ricordando la formula per dedurre il numero di divisori di un naturale n dalla sua scomposizioni in fattori primi, possiamo scrivere la seguente tabella.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
d_n	1	1	2	1	3	1	3	2	3	1	5	1	3	3	4	1	5	1	5	3

La strategia migliore per vincere è quella di ripetere il numero appena udito. Infatti se n è il numero detto, il risultato del dado deve essere un multiplo di n. Poiché $d_n < d_{mn}$ con $m \in \mathbb{N}_{<1}$, la probabilità che sia uscito il numero n è maggiore della probabilità che sia uscito il numero mn. Infatti per la probabilità condizionata, chiamata con X la variabile del risultato uscito sul dado e con E_n l'evento "viene detto il numero n",

$$\mathbb{P}[X = n | E_n] = \frac{\mathbb{P}[X = n \cap E_n]}{\mathbb{P}[E_n]} = \frac{\frac{1}{d_n}\cdot\frac{1}{20}}{\mathbb{P}[E_n]}$$

mentre

$$\mathbb{P}[X = mn | E_n] = \frac{\mathbb{P}[X = mn \cap E_n]}{\mathbb{P}[E_n]} = \frac{\frac{1}{d_{mn}}\cdot\frac{1}{20}}{\mathbb{P}[E_n]}$$

Quindi si vince se e solo se viene detto il numero esattamente uscito, pertanto la probabilità cercata è

$$\frac{1}{20}\sum_{n=2}^{21}\frac{1}{d_n} = \frac{237}{400}$$

8. Risposta: 0432
Trofeo Rabuzzi 2016
Scomponiamo la frazione che rappresenta il nostro numero N al variare di n numero naturale.

$$N = \frac{n^3 - 12}{n+2} = \frac{n^3 + 8 - 20}{n+2} = n^2 - 2n + 4 - \frac{20}{n+2}$$

Affinché N sia un numero intero relativo si deve avere che $(n+2)|20$. Ciò accade se n è uguale a 0, 2, 3, 8, 18. Infine va verificato che N sia un numero naturale. Ciò accade solo per 3, 8 e 18. Il prodotto di tali numeri è $3 \cdot 8 \cdot 18 = 432$.

9. Risposta: 0901
Gara di Roma 2011
Ponendo $x = 1$, si ottiene $f(y+1) = f(y) + 1$, e quindi $f(n) = n + f(0)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, che soddisfa l'equazione funzionale data per ogni scelta di f(0). Allora $0 \leq f(0) \leq 900$ permette 901 scelte differenti.

10. Risposta: 0121
Gara di Roma 2019
La risposta corretta è 121. Confrontando i coefficienti dei polinomi $x^3 - 7x^2 + 11x - 3 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ si ottiene

$$\alpha + \beta + \gamma = 7$$
$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 11$$
$$\alpha\beta\gamma = 3$$

Si calcola facilmente che $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 7^2 - 22 = 27$.

Dall'identità $(\alpha+\beta+\gamma)^3 = 3(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - 2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3) + 6\alpha\beta\gamma$ si ottiene allora che $2(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) = 567 + 18 - 343 = 242$. Il valore cercato è quindi $242/2 = 121$.

11. Risposta: 7959
Gara locale 2016
Sia O il centro della circonferenza, sia H l'intersezione tra le diagonali del quadrilatero. Sia $r = 12$ cm. Siccome $AD = r$, abbiamo $A\hat{O}D = 60°$. Abbiamo quindi che $A\hat{C}D = 30°$. Inoltre sappiamo che $A\hat{C}D = A\hat{B}D$, quindi abbiamo che ABH e DCH sono triangoli rettangoli simili con angoli 60° e 30°. Dato che $AB = \frac{3}{4}r$, si ha che $AH = \frac{3}{8}r$ e $BH = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{3}{4}r = \frac{3\sqrt{3}}{8}r$. D'altra parte abbiamo che il triangolo ADH è rettangolo con ipotenusa $AD = r$ e cateto minore $AH = \frac{3}{8}r$. Quindi $HD = \frac{\sqrt{55}}{8}r$. Infine, $CH = \sqrt{3}HD = \frac{\sqrt{3}\sqrt{55}}{8}r$. La richiesta è il rapporto $\frac{BH+HD}{AH+HC}$ se è minore di 1, altrimenti il reciproco:

$$\frac{BH+HD}{AH+HC} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{55}}{8}\frac{8}{3+\sqrt{3}\sqrt{55}} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{55}}{3+\sqrt{3}\sqrt{55}} = 0.7959...$$

12. Risposta: 4002
    Gara di Belmanto 2019
    Risulta che $v \cdot c = 676 - p^2 = 26^2 - p^2 = (26-p)(26+p)$, con $p < 24$, p primo che può assumere solo valori dell'insieme $\{2,3,5,7,11,13,17,19,23\}$. Pertanto le possibili terne ordinate (p, v, c) sono (3,23,29) e (3,29,23) e la somma richiesta sarà: $3 \cdot 23 \cdot 29 + 3 \cdot 29 \cdot 23 = 4002$.